ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ვ ა ხ ტ ა ნ გ   ჯ ა ო შ ვ ი ლ ი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის მიმართულება

ვინერისა და პუასონის ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

ს ა დ ო ქ ტ ო რ ო   დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი,
თსუ ასოცირებული პროფესორი
ფიზ-მათ. მეცნ. კანდიდატი ომარ ფურთუხია

თბილისი 2009 წელი

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი

როგორც ცნობილია, შემთხვევით პროცესთა თეორიასა და თანამედროვე სტოქასტურ ანალიზში განსაკუთრებული ადგილი უკავია ე. წ. მარტინგალური წარმოდგენის თეორემებს, რომელიც გულისხმობს, მაგალითად, ვინერისა და პუასონის ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალების საშუალებით წარმოდგენას. ეს თეორემები უაღრესად აქტუალურია ერთის მხრივ, შემთხვევით პროცესთა თეორიის შემდგომი განვითარებისათვის, ხოლო მეორეს მხრივ, იძლევა ფართო შესაძლებლობებს მათი გამოყენებისათვის თანამედროვე ფინანსური მათემატიკის მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტისას. გასული საუკუნის 80-იან წლებში აღმოჩნდა (იხ. Harrison, Pliska (1981)), რომ მარტინგალური წარმოდგენის თეორემები (გირსანოვის ზომის შეცვლის თეორემასთან ერთად) არსებითად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს თანამედროვე ფინანსურ მათემატიკაში. ეს მეთოდოლოგია წარმატებით გამოიყენება ამერიკული ოფციონის ვალუაციის ამოცანაში (იხ. bensoussan (1984), Karatzas (1988)), მოხმარება-ინვესტირების ოპტიმიზაციის ამოცანაში (იხ. Karatzas, Lehoczky, Shreve (1987); Cox, Huang (1989), Karatzas (1989), წონასწორობის ამოცანაში (იხ. Karatzas, Lehoczky, Shreve (1990)), ოპტიმალური პორტფელის აგების ამოცანაში (იხ. Ocone, Karatzas (1991)) და სხვა. კერძოდ, ინტეგრალურ წარმოდგენაში მონაწილე სტოქასტური ინტეგრალის ინტეგრანდის საშუალებით ხერხდება მაჰეჯირებელი სტრატეგიების აგება სხვადასხვა ტიპის ევროპულ ოფციონებში. ამ ტიპის წარმოდგენების მისაღებად გამოიყენება კლარკის (იხ. Clark (1970)) ცნობილი ფორმულა, თუმცა ეს უკანასკნელი არ იძლევა საშუალებას სტოქასტური ინტეგრალის ინტეგრანდის ცხადი სახის საპოვნელად, რაც აუცილებელია ოპტიმალური პორტფელის ასაგებად.

ვგულისხმობთ, რომ მოცემულია სტანდარტული ალბათური სივრცე ფილტრაციით $(\Omega;\Im;\Im_t, t \geq 0; P)$ და მასზე განსაზღვრული სტანდარტული ვინერის პროცესი $(w_t, \Im_t)_{t\geq 0}$.

კლარკის ცნობილი შედეგის თანახმად (იხ. Clark (1970)): თუ ξ -- $\Im_T$ - ზომადი კვადრატით ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდეა, $E\xi^2 < \infty$, მაშინ მოიძებნება ისეთი $\Im_t$ შეთანხმებული კვადრატით ინტეგრებადი $\varphi(t,\omega) \in L_2([0,T]\times\Omega)$ პროცესი, რომ P-თ.ყ. ადგილი აქვს სტოქასტურ ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$\xi = E\xi + \int_0^T \varphi(t,\omega)dw(t).$$

ეს შედეგი არაფერს ამბობს $\varphi(t,\omega)$ პროცესის ცხადი სახის პოვნაზე, შესაბამისად, მისი ამ სახით გამოყენება ევროპული ტიპის ოპციონების ჰეჯირების ამოცანებში შეუძლებელია. ამ მიმართულებით ცნობილია ერთი საკმაოდ ზოგადი შედეგი, ე. წ. ოკონე-კლარკის ფორმულა (იხ. Haussmann (1979), Ocone (1984)), რომლის თანახმადაც, ვინერის ფუნქციონალების შემთხვევაში კლარკის ფორმულაში მონაწილე სტოქასტური ინტეგრალის ინტეგრანდი წარმოადგენს შემდეგ პირობით მათემატიკურ ლოდინს:

$$\varphi(t,\omega) = E[D_t\xi \mid \Im_t^W](\omega), \qquad (1)$$

სადაც $D_t\xi$ არის ξ ფუნქციონალის ე. წ. სტოქასტური (ანუ მალივენის) წარმოებული.

იმისათვის, რომ შევიქმნათ წარმოდგენა სტოქასტურ წარმოებულზე, გავაკეთოთ მცირედი ექსკურსი სტოქასტური ინტეგრების თეორიაში. როგორც ცნობილია, ინტეგრების ჩვეულებრივ თეორიაში ინტეგრანდის ზომადობის მოთხოვნა არსებითად ნაკლები შეზღუდვაა, ვიდრე ინტეგრებადობის პირობა, რომელიც გულისხმობს ინტეგრანდის აბსოლუტური მნიშვნელობის გარკვეული აზრით შემოსაზღრულობას. რაც შეეხება იტოს სტოქასტურ ინტეგრალს

$$\int_0^T f(s,\omega)dw(s),$$

აქ სიტუაცია განსხვავებულია: გარდა იმისა, რომ ინტეგრანდი $f(s,\omega)$ ორი ცვლადის ზომადი ფუნქციაა, ის უნდა იყოს შეთანხმებული პროცესი – ყოველი $s\in[0,T]$- სათვის შემთხვევითი სიდიდე $f(s,\cdot)$ უნდა იყოს ზომადი $\Im_s^w := \sigma\{w(t), t\in[0,s]\}$ -- σ- ალგებრის მიმართ ანუ უნდა იყოს დამოუკიდებელი ვინერის პროცესის მომავლის ნაზრდებისაგან. ერთის მხრივ, ძალიან ბევრ სიტუაციაში ეს ბუნებრივი მოთხოვნაა, როდესაც ფილტრაცია ($\Im_s^w$ -- σ-ალგებრების ნაკადი) გვიჩვენებს შესაძლო ინფორმაციის ევოლუციას. მეორეს მხრივ, ეს მოთხოვნა დიდი ხნის განმავლობაში საკმაოდ ზღუდავდა როგორც თეორიის განვითარებას, ასევე სტოქასტური აღრიცხვის გამოყენების შესაძლებლობებს.

გასული საუკუნის 70-იანი წლებიდან იყო მრავალი მცდელობა რათა შეესუსტებინათ ინტეგრანდის შეთანხმებულობის პირობა როგორც იტოს სტოქასტური ინტეგრალის ინტეგრანდისათვის, ისევე “ფილტრაციის გაფართოების” თეორიაში. სრულიად განსხვავებული მეთოდი შემოთავაზებულ იქნა სკოროხოდის მიერ (იხ. Skorohod (1975)), რომელიც სიმეტრიული იყო დროის შებრუნების მიმართ, ე. ი. აზოგადოებდა იტოს როგორც პირდაპირ, ასევე შებრუნებულ ინტეგრალსაც და აღარ მოითხოვდა ინტეგრანდის დამოუკიდებლობას ვინერის პროცესის მომავლისაგან, რისთვისაც მას დასჭირდა ინტეგრანდის გარკვეული აზრით სიგლუვის მოთხოვნა, კერძოდ მისი სტოქასტურად წარმოებადობა. ამ იდეამ შემდგომი განვითარება ჰპოვა Gaveau, Trauber (1982), Nualart, Zakai (1986), Pardoux (1988), Protter, Malliavin (1978) და სხვების შრომებში. კერძოდ, Gaveau და Trauber-მა აჩვენეს, რომ სკოროხოდის სტოქასტური ინტეგრების ოპერატორი ემთხვევა სტოქასტური გაწარმოების (მალივენის) ოპერატორის შეუღლებულს.

შემთხვევით სიდიდეს $F:\Omega\to R^1$ უწოდებენ ვინერის გლუვ ფუნქციონალს, თუ მოიძებნება უსასრულოდ დიფერენცირებადი შემოსაზღვრული n ცვლადის f ფუნქცია, რომლის ყველა წარმოებული აგრეთვე შემოსაზღვრულია ($f\in C_b^\infty(R^n)$) ისეთი, რომ F წარმოიდგინება როგორც $F=f(w(t_1),w(t_2),...,w(t_n))$, სადაც $n\ge 1$, $t_i\in[0,T]$. გლუვი ფუნქციონალების კლასი აღვნიშნოთ Ψ-ასოთი. გლუვი ფუნქციონალის სტოქასტური წარმოებული განიმარტება როგორც შემდეგი სახის შემთხვევითი პროცესი:

$$D_t^w F := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(w(t_1),w(t_2)...,w(t_n))I_{[0,t_i]}(t). \qquad (2)$$

$D_\cdot^w$- წარმოადგენს წრფივ, შემოუსაზღვრელ და ჩაკეტვად ოპერატორს განსაზღრულს $L_2(\Omega)$ სივრცის მკვრივ ქვესიმრავლეზე მნიშვნელობებით $L_2([0,T]\times\Omega)$ სივრცეში. $D_\cdot^w$ ოპერატორის ჩაკეტვის განსაზღვრის არეს

აღნიშნავენ $D_{2,1}^{w}$ სიმბოლოთი. უფრო ზუსტად, $D_{2,1}^{w}$ -- ეს არის გლუვი ფუნქციონალების Ψ კლასის ჩაკეტვა შემდეგი ნორმის მიმართ:

$$\|F\|_{2,1} := \|F\|_{L_2(\Omega)} + \|D^w F\|_{L_2([0,T]\times\Omega)} .$$

$D_{2,1}^{w}$ -- წარმოადგენს ჰილბერტის სივრცეს $\|.\|_{2,1}$ ნორმის მომცემი სკალარული ნამრავლის მიმართ. სკოროხოდის ინტეგრების ოპერატორი აღვნიშნოთ δ^{w} სიმბოლოთი. მაშინ, როგორც ზემოთ შევნიშნეთ, Gaveau და Trauber-მა აჩვენეს, რომ $\delta^{w} = (D_{.}^{w})^{*}$.

(1) გამოსახულების გამოყენება ერთის მხრივ, როგორც წესი, მოითხოვს ძალიან მნიშვნელოვან ძალისხმევას, ხოლო, მეორეს მხრივ, იმ შემთხვევაში როცა ξ ფუნქციონალს არ გააჩნია სტოქასტური წარმოებული, მისი გამოყენება შეუძლებელია. განსხვავებული მეთოდი $\varphi(t,\omega)$ ინტეგრანდის საპოვნელად ეკუთვნის შირიაევს, იორს (იხ. Ширяев, Йор (2003)) და გრავერსენს, შირიაევსა და იორს (იხ. Граверсен, Ширяев, Йор (2006)), როცა ξ არის “მაქსიმუმის” ტიპის ფუნქციონალი. ისინი ასეთ ფუნქციონალს უკავშირებენ ასოცირებულ ლევის მარტინგალს და იყენებენ განზოგადოებულ იტოს ფორმულას, კერძოდ თუ $S_T = \max_{t\le T} w_t$, მაშინ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$S_T = ES_T + 2\int_0^T \left[1 - \Phi\left(\frac{S_t - w_t}{\sqrt{T-t}}\right)\right] dw_t ,$$

სადაც $\Phi(x)$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

ჩვენი მიდგომა იტოს კლასიკური აღრიცხვის ფარგლებში, სტანდარტული L_2 თეორიისა და სობოლევის წონიანი სივრცეების თეორიის საფუძველზე, საშუალებას იძლევა ცხადი სახით ავაგოთ $\varphi(t,\omega)$ იმ შემთხვევაშიც, როცა ξ ფუნქციონალს არ გააჩნია სტოქასტური წარმოებული (იხ. Jaoshvili, Purtukhia (2005a)). ცნობილია, რომ ხდომილების ინდიკატორს საზოგადოდ არ გააჩნია სტოქასტური წარმოებული. იმისათვის, რომ რაიმე A ხდომილობის ინდიკატორს გააჩნდეს სტოქასტური წარმოებული აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ალბათობა იყოს ნულის ტოლი: $\exists DI_A \Leftrightarrow P(A) = 0$. შესაბამისად, ოკონე-კლარკის ფორმულის გამოყენება შეუძლებელია მაგალითად, $I_{\{w(T)>0\}}$ -- ინდიკატორისათვის, მაშინ როცა ჩვენი მიდგომა საშუალებას იძლევა დაიწეროს შემდეგი წარმოდგენა:

$$I_{\{w(T)>0\}} = 1/2 + \int_0^T \Phi_{0,T-t}(w(t))dw(t) ,$$

სადაც $\Phi_{0,T-t}(\cdot)$ -- ნორმალური განაწილების ფუნქციაა პარამეტრებით 0 და $T-t$.

გარდა ამისა, მაგალითად, $f(w_T)$ ტიპის ფუნქციონალებისათვის ჩვენ დამოუკიდებლად გამოგვყავს სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა წინმსწრები (ანტისიპატიური) სტოქასტური ანალიზის გამოყენების გარეშე. ამასთანავე, ჩვენ ერთის მხრივ, ვიხილავთ შემთხვევას როცა f ფუნქცია არის C^1 კლასის (შესაბამისად, ოკონე-კლარკის ფორმულის გამოყენებითაც შეიძლებოდა ინტეგრანდის ცხადი სახის დადგენა), ხოლო მეორეს მხრივ, ვიხილავთ შემთხვევას, როცა f ფუნქცია არის არა კლასიკური აზრით გლუვი,

არამედ გააჩნია მხოლოდ პირველი რიგის განზოგადოებული წარმოებული $f \in W_2^1$ (შესაბამისად, ამ შემთხვევაში ოკონე-კლარკის ფორმულის გამოყენებით შეუძლებელია ინტეგრანდის ცხადი სახით გამოთვლა). ნაშრომში შესწავლილია როგორც ერთგანზომილებიანი, ისე მრავალგანზომილებიანი შემთხვევები. მიღებულია ვინერის პროცესის ლოკალური დროის განსხვავებული წარმოდგენა.

ოკონე-კლარკის ფორმულის შემდგომი განზოგადოება ეკუთვნის Ma, Protter და Martin (1998)-ს ე. წ. ნორმალური მარტინგალების კლასისათვის (მარტინგალს ეწოდება ნორმალური, თუ $\langle M,M \rangle_t = t$), რომლის თანახმადაც, თუ $F \in D_{2,1}^M$, მაშინ სამართლიანია ოკონე-ჰაუსმან-კლარკის წარმოდგენა:

$$F = EF + \int_0^T {}^p(D_t^M F)dM(t),$$

სადაც $D_{2,1}^M$-ით აღნიშნულია სივრცე კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციონალების, რომელთაც გააჩნიათ პირველი რიგის სტოქასტური წარმოებული, ხოლო ${}^p(D_t^M F)$ -- აღნიშნავს F ფუნქციონალის $D_t^M F$ სტოქასტური წარმოებულის ჭვრეტად პროექციას. ცხადია, ვინერის პროცესის შემთხვევაში ოკონე-ჰაუსმან-კლარკის ფორმულა დაემთხვევა ოკონე-კლარკის ფორმულას, ვინაიდან ვინერის პროცესის საკუთარ σ-ალგებრათა ნაკადი უწყვეტია და ამიტომ ჭვრეტადი პროექცია ემთხვევა შესაბამის პირობით მათემატიკურ ლოდინს. როგორც ვხედავთ, ეს წარმოდგენაც მოითხოვს, რომ F ფუნქციონალს გააჩნდეს სტოქასტური წარმოებული. მეორეს მხრივ, ამ შემთხვევაში, განსხვავებით ვინერის შემთხვევისაგან, შეუძლებელია სტოქასტური გაწარმოების ოპერატორის ჩვეულებრივი გზით განმარტება, ისე, რომ მივიღოთ $D_{2,1}^M$ სივრცის სობოლევის სივრცის სტრუქტურა. აქ სტოქასტური წარმოებულის განმარტება ეფუძნება ფუნქციონალის გაშლას ჯერადი სტოქასტური ინტეგრალების მწკრივად, მაშინ როდესაც ვინერის შემთხვევაში გარდა ამ მიდგომისა, გამოიყენება აგრეთვე სობოლევის სივრცის სტრუქტურა, რომელიც ბევრ შემთხვევაში სტოქასტური გაწარმოების ოპერატორის ცხადი სახით აგების საშუალებას იძლევა.

ვიგულისხმოთ, რომ $(\Omega,\Im,P)$ ალბათურ სივრცეზე მოცემულია M ნორმალური მარტინგალი ($\Im = \sigma\{M_t, t \in [0,T]\}$), რომელსაც გააჩნია ქაოტური წარმოდგენის თვისება (ამბობენ, რომ მარტინგალს გააჩნია ქაოტური წარმოდგენის თვისება თუ ნებისმიერი F შემთხვევითი სიდიდისათვის $L_2(\Omega,\Im,P)$ სივრციდან, მოიძებნება $f_n \in L_2([0,T]^n)$ ყველა ცვლადის მიმართ სიმეტრიულ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა, რომ იგი წარმოიდგინება ჯერადი ინტეგრალების მწკრივის სახით $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$). განიხილება $L_2(\Omega)$ სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე:

$$D_{2,1}^M := \{F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) : \sum_{n=0}^{\infty} nn! \|f_n\|^2_{L_2([0,T]^n)} < \infty\}.$$

M ნორმალურ მარტინგალთან დაკავშირებული სტოქასტური გაწარმოების ოპერატორი განიმარტება როგორც წრფივი ოპერატორი $D_\cdot^M : D_{2,1}^M \to L_2([0,T]\times\Omega)$ შემდეგი თანაფარდობით:

$$D_t^M F := \sum_{n=0}^{\infty} nI_{n-1}(f_n(\cdot,t)), \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ვინერის პროცესის შემთხვევაში ეს მიდგომა იძლევა იგივე შედეგს, რასაც იძლეოდა სობოლევის სივრცის სტრუქტურა, მაგრამ საზოგადოდ ეს ორი განმარტება არ ემთხვევა ერთმანეთს თუ მარტინგალის კვადრატული მახასიათებელი შემთხვევითია.

ნორმალურ მარტინგალთა კლასისათვის $D^M_{p,1}$ $(1<p<2)$ სივრცის განმარტება შეუძლებელია ჩვეულებრივი გზით (ე.ი. გლუვი ფუნქციონალების კლასის ჩაკეტვით შესაბამისი ნორმის მიმართ). ო. ფურთუხიას ნაშრომში (იხ. [58]) ნორმალურ მარტინგალთა კლასისათვის შემოღებულია სივრცე $D^M_{p,1}$, სადაც $1<p<2$ და განვაზოგადებულია ოკონე-ჰაუსმან-კლარკის წარმოდგენა ფუნქციონალებისათვის ამ სივრციდან.

Ma, Protter და Martin-ის მიერ მოყვანილ იქნა მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ სტოქასტური წარმოებულის ორი შესაძლებელი განმარტება ერთი და იგივეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მარტინგალის კვადრატული მახასიათებელი $[M,M]$ დეტერმინისტულია (მაგალითად, როგორც ვინერის პროცესის შემთხვევაში $[w,w]_t=t$). შესაბამისად, ოკონე-ჰაუსმან-კლარკის ფორმულა არ იძლევა საშუალებას ცხადი სახით ავაგოთ სტოქასტური გაწარმოების ოპერატორი, მაგალითად, კომპენსირებული პუასონის პროცესის ფუნქციონალებისათვის (რომელიც ცხადია განეკუთვნება ნორმალური მარტინგალების კლასს $\langle M,M\rangle_t=t$, მაგრამ მისი კვადრატული მახასიათებელი არა დეტერმინისტულია $[M,M]_t=N_t=M_t+t$), რომ არაფერი ვთქვათ მისი ჭვრეტადი პროექციის აგებაზე.

განვიხილოთ სიმეტრიული ორი ცვლადის ფუნქცია: $f(s,t)=I_{(a,b]}(s)I_{(a,b]}(t)$. იტოს ფორმულის გამოყენებით ადვილი დასანახია, რომ ორჯერადი სტოქასტური ინტეგრალი ამ ფუნქციიდან იქნება

$$I_2(f)=(M_a-M_b)^2-\{[M,M]_b-[M,M]_a\}.$$

აღვნიშნოთ $F(x_1,x_2):=(x_2-x_1)^2$ და $\xi:=F(M_a,M_b)$. თუ კი განვმარტავთ ამ ფუნქციონალის სტოქასტურ წარმოებულს ვინერის შემთხვევის ანალოგიურად (2) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$D^W_t\xi=2(M_b-M_a)I_{(a,b]}(t).$$

(3) განმარტების თანახმად კი ერთის მხრივ, გვაქვს:

$$D^M_tI_2(f)=2I_1(f(\cdot,t))=2\int_0^T I_{(a,b]}(s)dM_S\cdot I_{(a,b]}(t)=2(M_b-M_a)I_{(a,b]}(t),$$

ხოლო მეორეს მხრივ, სტოქასტური ოპერატორის წრფივობის თანახმად:

$$D^M_tI_2(f)=D^M_t(M_b-M_a)^2-D^M_t\{[M,M]_b-[M,M]_a\}.$$

უკანასკნელი სამი თანაფარდობიდან ჩანს, რომ სტოქასტური წარმოებულის ორი განმარტება ერთი და იგივე იქნება, მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა

$$D^M_t\{[M,M]_b-[M,M]_a\}=0\quad\forall t\in[0,T],$$

რაც ტოლფასია იმისა, რომ $[M,M]_b-[M,M]_a$ მუდმივია.

Ma, Protter და Martin-ის ამ მაგალითზე დაყრდნობით ჩვენ გამოვთვალეთ M_T^2-ის სტოქასტური წარმოებული და აღმოჩნდა, რომ იგი ტოლია $D^w_tM^2_T=2M_T+1$, განსხვავებით ვინერის შემთხვევისგან, სადაც $D^W_tw^2_T=2w_T$. პირველი ხარისხის სტოქასტური წარმოებულები ორივე შემთხვევაში ერთის

ტოლია. ე.ი. განსხვავება თავს იჩენს უკვე კვადრატული ფუნქციის წარმოებულთან. რაც შეეხება მაღალი ხარისხების სტოქასტურ წარმოებულებს, ვინერის შემთხვევაში საქმე მარტივადაა, კერძოდ, $D_t^W\{w_T^n\}=nw_T^{n-1}$, მაშინ როცა ნორმალური მარტინგალების შემთხვევაში მათი ცხადი სახის დადგენა არ ხერხდება (3) განმარტებიდან.

ნაშრომის მეორე თავში სემიმარტინგალებისათვის იტოს არაანტისიპატიური აღრიცხვის ჩარჩოებში აგებულია ცხადი გამოსახულებები სტოქასტური ინტეგრალის ინტეგრანდისათვის მარტინგალური წარმოდგენის თეორემაში სხვადასხვა ფუნქციონალებისათვის კომპენსირებული პუასონის პროცესიდან და მოყვანილია ფორმულა, რომელიც საშუალებას იძლევა მათთვის სტოქასტური წარმოებულის ჭვრეტადი პროექციებს ცხადი სახით აგების. განხილულია ხარისხოვანი, პოლინომიალური, კვადრატით ინტეგრებადი და სხვა ტიპის ფუნქციონალები. მათთვის გამოყვანილია ოკონე-ჰაუსმან-კლარკის ტიპის წარმოდგენები, სადაც ინტეგრანდი ცხადი სახით მოიცემა. შემოღებულია კომპენსირებული პუასონის პროცესის ფუნქციონალების საკმაოდ ფართო კლასი $W_{2,1,\alpha}$ და ამ კლასის ფუნქციონალებისათვის განზოგადოებულია ოკონე-ჰაუსმან-კლარკის ფორმულა. განიხილება როგორც ერთგანზომილებიანი, ისე მრავალგანზომილებიანი შემთხვევები.

თ ა ვ ი   პ ი რ ვ ე ლ ი

§ 1
დამხმარე დებულებები

მოვიყვანოთ ვინერის პროცესის რამოდენიმე თვისება, რომელიც ქვემოთ გამოყენებული იქნება ამ თავის სხვადასხვა თეორემის დამტკიცებისას.

ვთქვათ $(\Omega, \Im, \mathrm{P}, (\Im_t)_{0 \le t \le \infty})$ სტანდარტული ალბათური სივრცეა, ხოლო w_t - მასზე განსაზღვრული სტანდარტული ვინერის პროცესია. მაშინ მისთვის სამართლიანია შემდეგი ლემა:

ლემა 1.1. $$E[w_t^n] = \begin{cases} (2k-1)!!t^k, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad (k \in N)$$

სადაც $(2k-1)!!$-ით აღნიშნულია 1 დან $(2k-1)$-ის ჩათვლით ყველა კენტი რიცხვის ნამრავლი. ყველგან ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ $(2k)!! = 0$, $k \in N$.

დამტკიცება: ვისარგებლოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. $k = 1$-თვის ლემა სამართლიანია ვინაიდან $w_t \sim N(0,t)$ და შესაბამისად $Ew_t = 0$ და $Dw_t = t$. თუ $n = 2k+1$, მაშინ x^{2k+1} კენტი ფუნქციაა, $f_{w_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ – ლუწი ფუნქციაა და შესაბამისად $Ew_t^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 0$ როგორც კენტი ფუნქ-ციიდან ინტეგრალი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულ საზღვრებში. დავუშვათ $k = m$-სთვის ლემა სამართლიანია, ანუ $E[w_t^{2m}] = (2m-1)!!t^m$. დავამ-ტკიცოთ ლემის სამარლიანობა $k = m+1$ შემთხვევისთვის. გვაქვს:

$$E[w_t^{2(m+1)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2(m+1)} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \frac{-t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m+1} e^{-\frac{x^2}{2t}} d(-\frac{x^2}{2t}).$$

ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$E[w_t^{2(m+1)}] = \frac{-t(2m+1)}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{t(2m+1)}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx =$$

საიდანაც დაშვების თანახმად საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ

$$E[w_t^{2(m+1)}] = t(2m+1)E(w_t^{2p}) = t(2m+1)(2m-1)!!t^p =$$
$$= t(2m+1)!!t^m = (2m+1)!!t^{m+1}$$

შესაბამისად, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით ლემის დამტკიცება დასრულებულია. □

დავუშვათ, რომ $(\Omega, \Im, \mathrm{P}, (\Im_t)_{0 \le t \le \infty})$ სტანდარტული ალბათური სივრცეა, w_t კი მასზე განსაზღვრული სტანდარტული ვინერის პროცესია. $(\Im_t^w)_{t \ge 0}$ იყოს w_t ვინერის პროცესით გაკეთებული, P ზომის მიმართ გასრულებული, σ-ალგებრ-ათა ოჯახი $\Im_t^w = \sigma\{w_s, s \le t\}$.

თეორემა 1.1. ნებისმიერი t-სა და s-სათვის, $t \ge s$, და ნებისმიერი n-სათვის, $n \ge 2$, (P-თ.ყ.) ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$E[w_t^n \big| \Im_s^w] = \sum_{i=0}^{n} C_n^i i!!(t-s)^{(i/2)} w_s^{n-i} \ , \qquad (1.1)$$
სადაც ვგულისხმობთ, რომ $(-1)!! := 1$ და $0!! := 0$.

დამტკიცება: თუ გამოვიყენებთ 1.1 ლემის მტკიცებულებებსა და ნიუტონის ბინომის ფორმულას, აგრეთვე ვისარგებლებთ ვინერის პროცესის სტაციონალურობის თვისებით, პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების საფუძველზე, ადვილად დავრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. მართლაც, გვაქვს:

$$E[w_t^n \big| \Im_s^w] = E[(w_t - w_s + w_s)^n \big| \Im_s^w] =$$
$$= E[\sum_{i=0}^{n} C_n^i (w_t - w_s)^i w_s^{n-i} \big| \Im_s^w] = \sum_{i=0}^{n} C_n^i w_s^{n-i} E[(w_t - w_s)^i \big| \Im_s^w] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i w_s^{n-i} E(w_t - w_s)^i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (i-1)!!(t-s)^{(i/2)} w_s^{n-i} \ . \quad \square$$

1.1 თეორემის საილუსტრაციოდ შეგვიძლია მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი.

$$E[w_t^2 \big| \Im_s^w] = w_s^2 + t - s \ .$$

მოვიყვანოთ აგრეთვე რამოდენიმე ფაქტი ფუნქციონალური ანალიზის კურსიდან

ლემა 1.2. დავუშვათ, რომ როგორც $f(x)$ ასევე $xf(x)$ აბსოლუტურად ინტეგრებადი ფუნქციებია. მაშინ $g = F[f]$ დიფერენცირებადია და
$$g'(\lambda) = F[-ixf(x)]$$
სადაც $F[f]$-ით აღნიშნულია f ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა.

დამტკიცება: მართლაც, თუ მოვახდენთ
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$
ინტეგრალის (რომელიც განსაზღვრავს g-ს λ-ს მეშვეობით) დიფერენცირებას, ჩვენ მივიღებთ ინტეგრალს:
$$-i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) e^{-i\lambda x} dx \ ,$$
რომელიც ($xf(x)$-ის ინტეგრებადობის პირობიდან გამომდინარე) თანაბრად კრებადია λ-თი. შესაბამისად არსებობს g-ს წარმოებული და ლემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 1.2. თუ რაიმე ზომადი f ფუნქცია თითქმის ყველგან (a,b) ინტერვალზე, სადაც $-\infty \le a < b \le +\infty$, განსხვავებულია ნულისაგან და აკმაყოფილებს პირობას $|f(x)| \le Ce^{-\delta|x|}$, სადაც $\delta > 0$, მაშინ ფუნქციათა სისტემა $\{x^n f(x)\}$ $(n = 0,1,2,...)$ სრულია $L_2(a,b)$-ში.

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ $\{x^n f(x)\}_{n\geq 1}$ სისტემა არ არის სრული. მაშინ ხანი-ბანახის თეორემის ძალით მოიძებნება ისეთი არანულოვანი $h \in L_2(-\infty,+\infty)$ ფუნქცია, რომ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)h(x)dx = 0, \quad n = 0,1,2,...$$

(აქ ჩვენ გამოვიყენეთ თეორემა ჰილბერტის სივრცეში უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალების ზოგადი სახის შესახებ; კომპლექსური $L_2(a,b)$ სივრცის შემთხვევაში $h(x)$-ის ნაცვლად უნდა ავიღოთ მისი შეუღლებული $\bar{h}(x)$). ცხადია, რომ $fh \in L_1(a,b)$ და უფრო მეტიც $e^{\delta_1|x|}fh \in L_1(a,b)$ ნებისმიერი δ_1 მუდმივისათვის, $\delta_1 < \delta$. შემდგომში მოსახერხებელია ჩავთვალოთ, რომ $f(x)$ და $h(x)$ ფუნქციები განმარტებულია მთელს წრფეზე (წინააღმდეგ შემთხვევაში გავაგრძელოთ ისინი (a,b)-ს გარეთ: ჩავთვალოთ, რომ $f(x) = h(x) = 0$, თუ $x \notin (a,b)$). ვთქვათ, g ფუნქ-ცია არის fh ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა, ანუ

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)e^{-i\lambda x}dx .$$

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ g ფუნქცია გაგრძელდება, როგორც ანალიზური ფუნქცია $|\mathrm{Im}\zeta| < \delta$ ზოლში. მეორეს მხრივ, ლემა1.2-ის გამოყენებით, ამ ფუნქციის ყველა წარმოებული ხდება ნული, როცა $\lambda = 0$. ასე რომ $g(\lambda) \equiv 0$. ერთადერთობის თვისების გამოყენებით ვღებულობთ, რომ $f(x)h(x) = 0$ თითქმის ყველგან. რადგანაც $f(x)$ განსხვავებულია ნულისგან თ.ყ., შესაბამისად $h(x) = 0$ თ.ყ.. მაგრამ ეს ეწინააღნდეგება ჩვენს დაშვებას იმის შესახებ, რომ h არანულოვანი ფუნქციაა. ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს $\{x^n f(x)\}_{n\geq 1}$ სისტემის სისრულეს. □

ნაშრომში აგრეთვე დაგვჭირდება განზოგადებულ ფუნქციები და განზოგა-დებული წარმოებულები.

დავუშვათ, რომ f ფიქსირებული ფუნქციაა რიცხვით ღერძზე, რომელიც ინტეგრებადია ყოველ სასრულ ინტერვალზე და ვთქვათ φ უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც ხდება ნული რაიმე სასრული ინტერვალის გარეთ (ასეთ ფუნქციებს უწოდებენ ფინიტურ ფუნქციებს). ყოველ ასეთ φ ფუნქციას ფიქსირებული f ფუნქციის საშუალებით შესაძლებელია შევუსაბამოთ რიცხვი

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{1.2}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ. f შესაძლებელია განვიხილოთ, როგორც წრფივი ფუნქციონალი ფინიტური ფუნქციების გარკვეულ სივრცეზე. თუმცა (1.2) ტიპის ფუნქციონალებით არ ამოიწურება ყველა ფუნქციონალი, რომელიც შესაძლებელია შემოვიღოთ ამ სივრცეში. მაგალითად, თუ ყოველ φ ფუნქციას შევუსაბამებთ მის მნიშვნელობას ნულში, ჩვენ მივიღებთ წრფივ ფუნქციონალს, რომელიც არ წარმოიდგინება (1.2) სახით.

აღვნიშნოთ K სიმბოლოთი ყველა იმ ფინიტური φ ფუნქციების ერთობ-ლიობა რიცხვით ღერძზე, რომელთაც გააჩნიათ ყველა რიგის უწყვეტი წარმოებულები. ფუნქციები K სიმრავლიდან წარმოქმნიან წრფივ სივრცეს

(ფუნქციების შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ჩვეულებრივი ოპერაციების მიმართ).

$\{\varphi_n\}$ ელემენტების მიმდევრობას K-დან ეწოდება *კრებადი* φ ფუნქციისაკენ, $\varphi \in K$, თუ:

1) არსებობს ინტერვალი რომლის გარეთაც ყველა φ_n უდრის ნულს.
2) წარმოებულების მიმდევრობა $\{\varphi_n^{(k)}\}_{n\geq 1}$ თანაბრად კრებადია ამ ინტერვალზე $\varphi^{(k)}$ ფუნქციისაკენ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

K წრფივ სივრცეს, ზემოთ განმარტებული კრებადობით, უწოდებენ ძირითად სივრცეს, ხოლო მის ელემენტებს ძირითად ფუნქციებს.

განმარტება: განზოგადებული ფუნქცია (განსაზღრული რიცხვით ღერძზე) ეწოდება ძირითად K სივრცეზე განსაზღრულ ნებისმიერ $T(\varphi)$ უწყვეტ ფუნქციონალს. ამასთანავე, უწყვეტობის ქვეშ იგულისხმება, რომ $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$, როდესაც φ_n მიმდევრობა კრებადია φ ფუნქციისაკენ ძირითად K სივრცეში.

შევნიშნავთ, რომ ყოველი, ნებისმიერ სასრულ ინტერვალზე ინტეგრებადი, $f(x)$ ფუნქცია წარმოქმნის განზოგადებულ ფუნქციას. მართლაც, წარმოდგენა

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad (1.3)$$

არის უწყვეტი ფუნქციონალი K სივრცეზე. ასეთი ტიპის განზოგადებულ ფუნქციებს უწოდებენ *რეგულარულებს*, ხოლო იმათ ვინც ვერ წარმოდგება (1.3) სახით ეწოდებათ *სინგულარულები*.

სინგულარული განზოგადებული ფუნქციის ერთ-ერთი მაგალითია დირაკის δ ფუნქცია:

$$T(\varphi) = \varphi(0).$$

ეს არის უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალი K-ზე, ანუ ზემოთ შემოღებული ტერმინოლოგიის თანახმად არის განზოგადებული ფუნქცია. ამ ფუნქციონალს როგორც წესი წერენ შემდეგი სახით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx,$$

სადაც $\delta(x)$ „ფუნქცია" უდრის ნულს ყველა $x \neq 0$ წერტილში და არის უსასრულობა $x = 0$ წერტილში ისე, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

განზოგადებული ფუნქციებისთვის განსაზღვრულია შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები. შევნიშნავთ, რომ რეგულარული („ჩვეულებრივი" ფუნქციები ღერძზე) ფუნქციებისათვის შეკრების ოპერაცია განსაზღვრული როგორც განზოგადებული ფუნქციებისათვის ემთხვევა ჩვეულებრივი შეკრების ოპერაციას. იგივე შეიძლება ითქვას რიცხვზე გამრავლების ოპერაციაზე.

შემოვიღოთ განზოგადებული ფუნქციონალებისათვის ზღვარზე გადასვლის ოპერაცია. ვიტყვით, რომ განზოგადებულ ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_n\}_{n\geq 1}$ კრებადია f ფუნქციისაკენ, თუ ნებისმიერი φ ფუნქციისათვის, $\varphi \in K$, სრულდება:

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi), \text{ როცა } n \to \infty.$$

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, განზოგადებული ფუნქციების კრებადობა განიმარტება როგორც მის კრებადობა K სივრცის თითოეულ ელემენტზე.

განზოგადებულ ფუნქციათა სივრცეს ასეთი კრებადობით აღვნიშნავენ K^* სიმ-ბოლოთი.

თუ α უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ ბუნებრივად განი-მარტება α-ს ნამრავლი განზოგადებულ f ფუნქციაზე შემდეგი ფორმულით:

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$$

(მარჯვნივ მდგომ გამოსახულებას აქვს აზრი რადგანაც $\alpha\varphi \in K$). ყველა ეს ოპერაცია: შეკრება, რიცხვზე ნამრავლი და უსასრულოდ დიფერენცირებად ფუნ-ქციაზე ნამრავლი უწყვეტია.

შევნიშნოთ, რომ შეუძლებელია განიმარტოს ორი განზოგადებული ფუნქც-იის ნამრავლის ოპერაცია, თუ მოვითხოვთ, რომ იგი იყოს უწყვეტი და რეგულა-რული ფუნქციებისათვის დაემთხვეს ჩვეულებრივი გამრავლების ოპერაციას.

განვმარტოთ ახლა განზოგადებული ფუნქციებისათვის დიფერენცირების ოპერაცია და განვიხილოთ მისი თვისებები.

დავუშვათ, რომ T არის ფუნქციონალი K სივრცეზე, რომელიც წარმოქმ-ნილია უწყვეტად დიფერენცირებადი f ფუნქციით:

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx .$$

მისი წარმოებული ბუნებრივია დავარქვათ ფუნქციონალს $\dfrac{\partial T}{\partial x}$, რომელიც მოიცე-მა ფორმულით:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx .$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფირმულით, თუ გავითვალისწინებთ, რომ φ ფუ-ნქცია ნული ხდება გარკვეული სასრული ინტერვალის გარეთ, მივიღებთ:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx .$$

განმარტება: განზოგადებული T ფუნქციის წარმოებული $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ ეწოდება ფუ-ნქციონალს, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\varphi) = -T(\varphi') .$$

ზემოთ აღნიშნული განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულებ-ების სამართლიანობა:

1) ნებისმიერ განზოგადებულ ფუნქციას გააჩნია ნებისმიერი რიგის წარმოებ-ული.

2) თუ განზოგადებული ფუნქციების მიმდევრობა $\{f_n\}_{n\geq 1}$ კრებადია f განზოგადებული ფუნქციისკენ (განზოგადებული ფუნქციების კრებადობის განმარტების აზრით), მაშინ წარმოებულების მიმდევრობა $\{f'_n\}$ კრებადია ზღვრული ფუნქციის f' წარმოებულისაკენ. ანალოგიური დებულება სამართლი-ანია ნებისმიერი რიგის წარმოებულისათვის.

განვიხილოთ ჰევისაიდის ფუნქცია:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{როცა } x > 0; \\ 0, & \textit{როცა } x \leq 0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია წარმოქმნის წრფივ ფუნქციონალს:

$$(f,\varphi)=\int_0^\infty \varphi(x)dx\,.$$

განზოგადებული ფუნქციებისათვის წარმოებულის განმარტების თანახმად (იმის გათვალისწინებით, რომ φ ხდება 0 უსასრულობაში), გვაქვს:

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi')=-\int_0^\infty \varphi'(x)dx=\varphi(0)\,.$$

ასე, რომ ჰევისაიდის ფუნქციის წარმოებული ემთხვევა დირაკის δ ფუნქციას.

ზემოთ თქმულიდან ასევე გამომდინარეობს, რომ თუ f რეგულარული ფუნქციაა, რომელსაც აქვს წარმოებული და უწყვეტია (ან უბან-უბან უწყვეტია), მაშინ მისი წარმოებული როგორც განზოგადებული ფუნქციის წარმოებული ემთხვევა ჩვეულებრივი აზრით წარმოებულს.

ვთქვათ ρ-არაუარყოფითი ფუნქციაა $C^\infty(R^d)$ სივრციდან, რომელიც ხდება ნული ერთეულოვანი წრის გარეთ და აკმაყოფილებს პირობას

$$\int_{R^d}\rho(x)dx=1\,. \tag{1.4}$$

ასეთ ფუნქციას უწოდებენ *გამაგლუვებელ* ფუნქციას. ასეთი ფუნქციის ტიპიური წარმომადგენელია:

$$\rho(x)=\begin{cases} c\cdot\exp\left(\dfrac{1}{|x|_d^2-1}\right), & \textit{როცა}\quad |x|_d\le 1;\\ 0, & \textit{როცა}\quad |x|_d>1.\end{cases}$$

სადაც კოეფიციენტი c გამოითვლება (1.4) პირობიდან. ρ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ზარისმაგვარი ფორმა.

ნებისმიერი $f\in L^p(\Omega)$ ფუნქციისათვის და $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის განვმარტოთ:

$$f_{\rho,\varepsilon}(x)=\varepsilon^{-d}\int_{R^d}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)dy=\int_{|z|_d\le 1}\rho(z)f(x+\varepsilon z)dz\,.$$

ცხადია მიღებული ფუნქცია არის უსასრულოდ წარმოებადი და როცა $\varepsilon\to 0$, მაშინ ფუნქცია $y\mapsto \varepsilon^{-d}\rho\left(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right)$ მიისწრაფივს დირაკის დელტა ფუნქციისაკენ x წერტილში. აღსანიშნავია ასევე, რომ როცა $\varepsilon\to 0$, მაშინ $f_{\rho,\varepsilon}\to f$ ამიტომ f ფუნქციის განზოგადებულ წარმოებულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ $f_{\rho,\varepsilon}$ ფუნქციების წარმოებულების ზღვარი, რომელიც იმ შემთხვევაში როცა f-ს გააჩნია ჩვეულებრივი წაერმოებული დაემთხვევა მას.

განმარტება: ნამდვილ $\overline{\mathrm{B}(R^d)}$-ზომად ფუნქციათა სივრცეს, რომლებიც თავიანთ m რიგამდე განზოგადებულ წარმოებულებთან ერთად ეკუთვნიან L_p სივრცეს, ეწოდება სობოლევის სივრცე და აღინიშნება W_p^m სიმბოლოთი ($p>1, m\ge 0$).

თეორემა 1.3. (იხ. სობოლევი 1950) სობოლევის სივრცე W_p^m აღჭურვილი ნორმით

$$\|f\|_{m,p} := \left(\sum_{|\gamma|\le m} \int_{R^d} \left| f_\gamma(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

წარმოადგენს სეპარაბელურ ბანახის სივრცეს (აქ $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, ..., \gamma^d)$ არის მულტი-ინდექსი (თითოეული $\gamma^i \in N \cup \{0\}$),

$$f_\gamma(x^1, x^2, ..., x^n) := \frac{\partial^{\gamma^1+\gamma^2+\cdots+\gamma^d}}{\partial(x^1)^{\gamma^1}\partial(x^2)^{\gamma^2}\cdots\partial(x^d)^{\gamma^d}} f(x^1, x^2, ..., x^n)).$$

როცა $p = 2$, ეს სივრცე წარმოადგენს ჰილბერტის სივრცეს $(.,.)_{m,2}$ სკალარული ნამრავლის მიმართ, რომელიც წარმოიქმნება $\|.\|_{m,2}$ ნორმით.

ვიგულისხმოთ რომ r და p ნამდვილი, მკაცრად დადებითი საკმარისად გლუვი ფუნქციებია.

განმარტება (იხ. ფურთუხია 1984) აღვნიშნოთ $W_p^{m,r,\rho}$ სიმბოლოთი ნამდვილი $\overline{B(R^d)}$-ზომად ფუნქციათა სივრცე, რომელთაც გააჩნიათ m რიგამდე (ჩათვლით) განზოგადებული წარმოებული სასრული ნორმით:

$$\|f\|_{m,p,r,\rho} := \left(\int_{R^d} \sum_{|\gamma|\le m} \frac{|\gamma|!}{\gamma^1!\cdots\gamma^d!} C_m^{|\gamma|} \left| r(x)\rho^{|\gamma|}(x) f_\gamma(x) \right|^p dx \right)^{1/p}, \qquad (1.5)$$

სადაც $|\gamma| = \gamma^1 + \gamma^2 + \cdots + \gamma^d$, როცა $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, ..., \gamma^d)$.

თეორემა 1.4. (იხ. ფურთუხია 1984). წონიანი სობოლევის სივრცე $W_p^{m,r,\rho}$, აღჭურვილი (1.5) ნორმით, წარმოადგენს სეპარაბელურ ბანახის სივრცეს. როცა $\rho = 2$, ეს სივრცე წარმოადგენს ჰილბერტის სივრცეს $(.,.)_{m,2,r,\rho}$ სკალარული ნამრავლის მიმართ, რომელიც წარმოქმნილია $\|.\|_{m,2,r,\rho}$ ნორმით.

მოვიყვანოთ აგრეთვე ფუნქციის გაგლუვების სობოლევის მეთოდი. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\zeta(x) := \begin{cases} \exp\{|x|_d^2 (|x|_d^2 - 1)^{-1}\}, & \textit{როცა} \quad |x|_d^2 \le 1; \\ 0, & \textit{როცა} \quad |x|_d^2 > 1. \end{cases}$$

თუ f ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა R^d-ზე, მაშინ მისი ე.წ. სობოლევის საშუალო განიმარტება შემდეგნაირად:

$$T_\varepsilon f(x) := \varepsilon^{-d} \kappa \int_{R^d} \zeta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) f(y)dy = \kappa \int_{|y|_d \le 1} \zeta(y) f(x + \varepsilon y)dy,$$

სადაც $\kappa := \left(\int_{R^d} \zeta(x)dx \right)^{-1}$.

ასე განმარტებულ $T_\varepsilon f$ ფუნქციას გააჩნია ნებისმიერი რიგის წარმოებული.

თეორემა 1.5. (იხ. ნიკოლსკი 1969, პუნქტი 1.4; 4.5)

ა) T_ε წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორია W_p^m სობოლევის სივრცეში;

ბ) თუ $f \in W_p^m$, მაშინ $\lim_{\varepsilon\to 0} \|T_\varepsilon f - f\|_{m,p} = 0$;

გ) თუ $f \in W_p^m$, მაშინ $(T_\varepsilon f)_\gamma = T_\varepsilon f_\gamma$ ნებისმიერი ისეთი γ მულტიინდექსისათვის, რომლისთვისაც $|\gamma| \le m$, ამასთანავე $\|T_\varepsilon f\|_{m,p} \le \|f\|_{m,p}$ (აქ g_γ აღნიშნავს g ფუნქციის γ რიგის განზოგადებულ წარმოებულს).

თეორემა 1.6. თუ $f \in L_{2,T/\alpha}, 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ (იხ. § 1.3), მაშინ მოიძებნება ისეთი მუდმივი c, რომ ადგილი აქვს შეფასებას :

$$\|T_\varepsilon f\|^2_{L_{2,T}} \le c \cdot \|f\|^2_{2,T/\alpha}.$$

დამტკიცება: გადმოცემის სიმარტივის მიზნით განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი შემთხვევა ($d=1$). თუ ვისარგებლებთ ჰელდერის უტოლობითა და ელემენტალური უტოლობით: $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ:

$$\|T_\varepsilon f(\cdot)\|^2_{L_{2,T}} = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 \left(\int_{-1}^{1} f(x+\varepsilon y)\zeta(y)dy \right)^2 e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 \int_{-1}^{1} f^2(x+\varepsilon y)dy \cdot \int_{-1}^{1} \zeta^2(y)dy \cdot e^{-\frac{x^2}{2T}} dx =$$

$$= \kappa^2 \int_{-1}^{1} \zeta^2(y)dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} f^2(x+\varepsilon y) e^{-\frac{(x+\varepsilon y)^2}{2T/\alpha}} e^{\frac{(x+\varepsilon y)^2}{2T/\alpha}} dy \right) e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \le$$

$$\le \kappa^2 \int_{-1}^{1} \zeta^2(y)dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} f^2(x+\varepsilon y) e^{-\frac{(x+\varepsilon y)^2}{2T/\alpha}} e^{\frac{2x^2}{2T/\alpha}+\frac{2\varepsilon^2 y^2}{2T/\alpha}} dy \right) e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \le$$

$$\le \kappa^2 \int_{-1}^{1} \zeta^2(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} f^2(x+\varepsilon y) e^{-\frac{(x+\varepsilon y)^2}{2T/\alpha}} dy \right) e^{\frac{\alpha\varepsilon^2}{T}} e^{\frac{\alpha x^2}{T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \le$$

$$\le \kappa^2 e^{\frac{\alpha\varepsilon^2}{T}} \int_{-1}^{1} \zeta^2(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x+\varepsilon y) e^{-\frac{(x+\varepsilon y)^2}{2T/\alpha}} dy \right) e^{-\frac{(1-2\alpha)x^2}{2T}} dx =$$

$$= \kappa^2 e^{\frac{\alpha\varepsilon^2}{T}} \int_{-1}^{1} \zeta^2(y)dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1-2\alpha)x^2}{2T}} dx \cdot \|f\|^2_{2,T/\alpha} = c \cdot \|f\|^2_{2,T/\alpha}. \quad \square$$

შენიშვნა: ანალოგიურად შემოწმდება, რომ თუ $\partial f \in L_{2,T/\alpha}$ $(0 < \alpha < \dfrac{1}{2})$, მაშინ მოიძებნება ისეთი მუდმივი c, რომ ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\|T_\varepsilon \partial f\|_{2,T} \le c \cdot \|\partial f\|_{2,T/\alpha}.$$

§ 2
ერთი ცვლადის ვინერის პოლინომიალური ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

განვიხილოთ $\xi = f(w_T)$ ტიპის შემთხვევითი სიდიდე, სადაც w_t არის ვინერის პროცესი. შევეცადოთ მისთვის დავადგინოთ კლარკის მარტინგალურ წარმოდგენაში

$$\xi = E\xi + \int_0^T \varphi(t,\omega)dw_t$$

მონაწილე სტოქასტური ინტეგრალის ინტეგრანდი ცხადი სახით. f ფუნქცია შეიძლება იყოს სხვადასხვა სახის. სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია რამოდენიმე შემთხვევა:

1. f არის ხარისხოვანი ფუნქცია;
2. f არის პოლინომიალური ფუნქცია;
3. f-ს გააჩნია პირველი რიგის ჩვეულებრივი წარმოებული;
4. f-ს გაანია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული.

ყველგან ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ w_t არის $(\Omega, \Im, P)$ სტანდარტულ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული სტანდარტული ვინერის პროცესი და $\Im_t^w$ არის w_t პროცესის შესაბამისი σ-ალგებრათა ნაკადი.

თეორემა 2.1. *თუ f არის ხარისხოვანი ფუნქცია, $f(x) = x^n$ (ანუ, $f(w_T) = w_T^n$), მაშინ $f(w_T)$ შემთხვევითი სიდიდე წარმოიდგინება შემდეგი სახით:*

$$f(w_T) = E[f(w_T)] + \int_{(0,T]} E\{[f(w_T)]'_x \big| \Im_t^w\}dw_t \qquad \text{(P-თ.ყ.)}, \qquad (2.1)$$

სადაც $[f(w_T)]'_x := nw_T^{n-1}$

დამტკიცება: განვიხილოთ ცალ-ცალკე ლუწი და კენტი ხარისხის შემთხვევები. ჯერ დავამტკიცოთ $n = 2k$ შემთხვევისთვის. თვალსაჩინოებისათვის წინასწარ განვიხილოთ $n = 2$-ის შემთხვევა, ანუ გვაქვს $\xi = w_T^2$ შემთხვევითი სიდიდე.

გამოვთვალოთ ამ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\Im_t^w$ σ-ალგებრის მიმართ, $X_t := E(w_T^2 \big| \Im_t^w)$ $(t \le T)$. ამ მიზნით w_T-ს დაუმატოთ და გამოვაკლოთ w_t და ვისარგებლოთ პირობითი მათემატიკური ლოდინის წრფივობით. გვაქვს:

$$X_t := E(w_T^2 \big| \Im_t^w) = E[(w_T - w_t + w_t)^2 \big| \Im_t^w] =$$

$$= E[(w_T - w_t)^2 \big| \Im_t^w] + 2E[(w_T - w_t)w_t \big| \Im_t^w] + E[w_t^2 \big| \Im_t^w],$$

საიდანაც ვინერის პროცესის ნაზრდების წარსულისაგან დამოუკიდებლობის და სტაციონალურობის თვისების გამოყენებით, პირობითი მათემატიკური ლოდინი ცნობილი თვისებების საფუძველზე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$X_t = E(w_T - w_t)^2 + 2w_t E(w_T - w_t) + w_t^2 = E(w_{T-t}^2) + w_t^2 .$$

1.1 ლემის თანახმად $Ew_{T-t}^2 = T - t$. ამიტომ გვაქვს:

$$X_t = T - t + w_t^2$$

დავწეროთ იტოს ფორმულა X_t შემთხვევითი პროცესისათვის. მაშინ გვექნება თანაფარდობა:

$$dX_t = -dt + 2w_t dw_t + dt = 2w_t dw_t .$$

გადავწეროთ ეს დიფერენციალური ტოლობა ინტეგრალური სახით:

$$X_T = X_0 + \int_0^T dX_t .$$

თუკი ახლა უკანასკნელ თანაფარდობაში გავითვალისწინებთ, რომ

$$X_T = E[w_T^2 | \Im_T^w] = w_T^2 \quad \text{და} \quad X_0 = E[w_T^2 | \Im_0^w] = Ew_T^2 ,$$

$\xi = w_T^2$ შემთხვევითი სიდიდისათვის მივიღებთ დასამტკიცებელ წარმოდგენას:

$$w_T^2 = Ew_T^2 + \int_0^T 2w_t dw_t ,$$

ანუ $n = 2$-თვის მივიღეთ დასამტკიცებელი წარმოდგენა.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. გამოვიყვანოთ წარმოდგენა $f(w_T) = w_T^{2k}$ $(k \neq 1)$ შემთხვევისთვის. დებულების დამტკიცების გზა ანალოგიურია $n = 2$ შემთხვევის. ნიუტონის ბინომის ფორმულისა და (1.1) ტოლობების გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{aligned} X_t &:= E[w_T^{2k} | \Im_t^w] = E[(w_T - w_t + w_t)^{2k} | \Im_t^w] = \\ &= C_{2k}^0 E[(w_T - w_t)^{2k} | \Im_t^w] + C_{2k}^1 E[(w_T - w_t)^{2k-1} w_t | \Im_t^w] + \\ &+ C_{2k}^2 E[(w_T - w_t)^{2k-2} w_t^2 | \Im_t^w] + \ldots + C_{2k}^{2k-1} E[(w_T - w_t) w_t^{2k-1} | \Im_t^w] + \\ &+ C_{2k}^{2k} E[w_t^{2k} | \Im_t^w] = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i E[(w_T - w_t)^{2k-i} w_t^i | \Im_t^w], \end{aligned}$$

საიდანაც ვინერის პროცესისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\begin{aligned} X_t &= C_{2k}^0 E[(w_T - w_t)^{2k}] + C_{2k}^1 E[w_T - w_t]^{2k-1} w_t + \\ &+ C_{2k}^2 E[(w_T - w_t)^{2k-2}] w_t^2 + \ldots + C_{2k}^{2k} w_t^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i w_t^i E[(w_T - w_t)^{2k-i}] . \end{aligned}$$

1.1 ლემის გამოყენებით უკანასკნელი ჯამის ყოველი მეორე წევრი ნულის ტოლია, ხოლო დარჩენილი წევრები შემდეგნაირად გადაიწერება.

$$\begin{aligned} X_t &= C_{2k}^0 (2k-1)!!(T-t)^k + C_{2k}^2 (2k-3)!!(T-t)^{k-1} w_t^2 + \cdots + \\ &+ C_{2k}^{2k-2} (T-S) w_t^{2k-2} + w_t^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i w_t^i (2k-i-1)!!(T-t)^{\frac{2k-i}{2}} . \end{aligned}$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ იტოს ფორმულას X_t შემთხვევითი პროცესისათვის, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი თანაფარდობის სამართლიანობაში:

$$\begin{aligned} dX_t &= (2k-1)!!(-k)(T-t)^{k-1} dt + C_{2k}^2 (2k-3)!![-(k-1)(T-t)^{k-2} w_t^2 dt + \\ &+ 2(T-t)^{k-1} w_t dw_t + (T-t)^{k-1} dt] + \cdots + C_{2k}^{2k-2} [-w_t^{2(k-1)} dt + \\ &+ 2(T-t)(k-1) w_t^{2(k-1)-1} dw_t + (T-t)(k-1)(2k-3) w_t^{2(k-2)} dt] + \\ &+ k(2k-1) w_t^{2(k-1)} dt + 2k w_t^{2k-1} dw_t = \end{aligned}$$

$$=\sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^{i}(2k-i-1)!![-\frac{2k-i}{2} w_t^i (T-t)^{\frac{2k-i}{2}-1} dt +$$
$$+ i\, w_t^{i-1}(T-t)^{\frac{2k-i}{2}} dw_t + \frac{1}{2} i(i-1) w_t^{i-2} (T-t)^{\frac{2k-i}{2}} dt],$$
სადაც $(2k-1)!!:=1\cdot 3\cdots(2k-1)$; $2k!!:=0$; $(-1)!!:=1$ (კერძოდ, როცა უკანასკნელ ჯამში აჯამვის ინდექსი $i=2k$, მაშინ $(2k-i-1)!!=(-1)!!=1$).

უკანასკნელ წარმოდგენაში, კვადრატული ფრჩხილების შიგნით, ის შესაკრებები, რომლებშიც მონაწილეობს dt, ერთმანეთს აბათილებს. ამაში დასარწმუნებლად ერთმანეთს შევადაროთ კვადრატული ფრჩხილების შიგნით პირველი და მესამე შესაკრებები, რომელთაც შეესაბამება w_t-ს შესაბამისად, $i=(2p-2)$-სა და $i=2p$. ჩვენ ადვილად დავინახავთ, რომ ეს წევრები ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან. მართლაც გვაქვს:

$$-C_{2k}^{2p-2}(2k-2p+1)!!\frac{2k-2p+2}{2} w_t^{2p-2}(T-t)^{\frac{2k-2p+2}{2}-1} dt =$$
$$=-\frac{(2k)!}{(2p-2)!(2k-2p+2)!}(2k-p+1)!!(k-p+1) w_t^{2p-2}(T-t)^{k-p} dt =$$
$$=-\frac{(2k)!}{(2p)!(2k-2p)!}\cdot\frac{2p(2p-1)}{(2k-2p+1)(2k-2p-2)}\times$$
$$\times(2k-p+1)!!\cdot(k-p+1) w_t^{2p-2}(T-t)^{(k-p)} dt =$$
$$=-C_{2k}^{2p}(2k-2p-1)!!\cdot\frac{1}{2}\cdot 2p(p-1) w_t^{2p-2}(T-t)^{k-p} dt .$$

შესაბამისად, აღნიშნული წევრები ერთმანეთს გააბათილებს და საბოლოოდ გვრჩება, რომ:

$$dX_t = 2C_{2k}^{2}(2k-3)!!(T-t)^{k-1} w_t dw_t +$$
$$+4C_{2k}^{4}(2k-5)!!(T-t)^{k-2} w_t^3 dw_t + \cdots +$$
$$+2C_{2k}^{2k-2}(T-t)(k-1) w_t^{2k-3} dw_t + 2k w_t^{2k-1} dw_t =$$
$$=[2C_{2k}^{2}(2k-3)!!(T-t)^{k-1} w_t + 4C_{2k}^{4}(2k-5)!!(T-t)^{k-2} w_t^3 +$$
$$+\cdots+2C_{2k}^{2k-2}(T-t)(k-1) w_t^{2k-3} + 2kC_{2k}^{2k} w_t^{2k-1}] dw_t .$$

თუ ახლა ვისარგებლებთ თანაფარდობებით:

$$2jC_{2k}^{2j}(2k-2j-1)!! = 2j\frac{2k(2k-1)!}{2j(2j-1)!(2k-2j)!}\cdot\frac{(2k-2j+1)!!}{2k-2j+1} =$$
$$=2kC_{2k-1}^{2j-1}(2k-2j+1)!!\ , \qquad j=1,2,...,k-1$$
(მაგალითად, $(2k-2)C_{2k}^{2k-2}=(2k-2)\dfrac{(2k)!}{(2k-2)!2!}=2kC_{2k-1}^{2k-3}$),

მაშინ წინა ტოლობა შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$dX_t = [2kC_{2k-1}^{1}(2k-1)!!(T-t)^{k-1} w_t + \cdots +$$
$$+2kC_{2k-1}^{2k-3}(T-t) w_t^{2k-3} + 2kC_{2k-1}^{2k-1} w_t^{2k-1}] dw_t .$$

უკანასკნელ ტოლობაში კვადრატულ ფრჩხილებს შიგნით მყოფი გამოსახულება 1.1 თეორემის თანახმად წარმოადგენს $E[2kw_T^{2k-1}\,|\,\Im_t^w]$ პირობითი მათემატიკური ლოდინის გაშლას. შესაბამისად ჩვენ ვასკვნით, რომ:

$$dX_t = E[2kw_T^{2k-1}\,|\,\Im_t^w] dw_t .$$

მიღებული სტოქასტური დიფერენციალი შევიტანოთ თანაფარდობაში

$$X_T = X_0 + \int_0^T dX_t$$

და გავითვალისწინოთ ტოლობები:

$$X_T = E[w_T^{2k} \big| \Im_T^w] = w_T^{2k} \quad \text{და} \quad X_0 = E[w_T^{2k} \big| \Im_0^w] = Ew_T^{2k}\ ,$$

მაშინ მივიღებთ წარმოდგენას:

$$w_T^{2k} = E[w_T^{2k}] + \int_{(0,T]} E\{[(w_T^{2k})_x' \big| \Im_t^w]\} dw_t\ .$$

ამით თეორემის დამტკიცება $n = 2k$ შემთხვევისათვის დასრულებულია.

ახლა განვიხილოთ $n = 2k+1$ შემთხვევა. $\xi = w_T$ შემთხვევითი სიდიდისათვის წარმოდგენა ტრივიალურია. განვიხილოთ $\xi = w_T^3$ შემთხვევითი სიდიდე. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად გვაქვს:

$$X_t := E[w_T^3 \big| \Im_t^w] = E[(w_T - w_t + w_t)^3 \big| \Im_t^w] =$$

$$= E[(w_T - w_t)^3 \big| \Im_t^w] + 3E[(w_T - w_t)^2 w_t \big| \Im_t^w] +$$

$$+ 3E[(w_T - w_t) w_t^2 \big| \Im_t^w] + E[w_t^3 \big| \Im_t^w] = 3(T-t)w_t + w_t^3\ .$$

გამოვიყენოთ იტოს ფორმულა X_t პროცესისათვის:

$$dX_t = 3(T-t)dw_t + 3w_t^2 dw_t\ .$$

თუ ამ სტოქასტურ დიფერენციალს შევიტანთ ტოლობაში

$$X_T = X_0 + \int_0^T dX_t\ ,$$

ვისარგებლებთ იგივეობებით: $X_T = E[w_T^3 \big| \Im_T^w] = w_T^3$ და $X_0 = E[w_T^3 \big| \Im_0^w] = Ew_T^3$, მაშინ მივიღებთ, რომ:

$$w_T^3 = Ew_T^3 + \int_0^T 3[(T-t) + w_t^2] dw_t$$

რაც 1.1 თეორემის გათვალისწინებით გვაძლევს სასურველ წარმოდგენას:

$$w_T^3 = Ew_T^3 + \int_0^T E[(w_T^3)_x' \big| \Im_t^w] dw_t\ .$$

გადავიდეთ $f(w_T) = w_T^{2k+1}$ $(k \neq 1)$ შემთხვევის განხილვაზე. დამტკიცების გზა ანალოგიურია $n = 2k$ შემთხვევაში ჩატარებული დამტკიცების გზის.

განვიხილოთ შემთხვევითი პროცესი $X_t := E[w_T^{2k+1} \big| \Im_t^w]$. ნიუტონის ბინომის ფორმულის და (1.1) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$X_t := E[w_T^{2k+1} \big| \Im_t^w] = E[(w_T - w_t + w_t)^{2k+1} \big| \Im_t^w] =$$

$$= C_{2k+1}^0 E[(w_T - w_t)^{2k+1} \big| \Im_t^w] + C_{2k+1}^1 E[(w_T - w_t)^{2k} w_t \big| \Im_t^w] +$$

$$+ C_{2k+1}^2 E[(w_T - w_t)^{2k-1} w_t^2 \big| \Im_t^w] + \cdots +$$

$$+ C_{2k+1}^{2k} E[(w_T - w_t) w_t^{2k} \big| \Im_t^w] + C_{2k+1}^{2k+1} E[w_t^{2k+1} \big| \Im_t^w]\ .$$

პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების საფუძველზე, 1.1 ლემის თანახმად, უკანასკნელი ჯამის ყოველი მეორე შესაკრები ნულის ტოლია, ხოლო დარჩენილი წევრები შემდეგნაირად გადაიწერება.

$$X_t = C_{2k+1}^1 (2k-1)!!(T-t)^k w_t + C_{2k+1}^3 (2k-3)!!(T-t)^{k-1} w_t^3 +$$
$$+\cdots+ C_{2k+1}^{2k-1}(T-t) w_t^{2k-1} + w_t^{2k+1}.$$

აქედან იტოს ფორმულის გამოვიყენებით ადვილად მივიღებთ, რომ:

$$dX_t = C_{2k+1}^1 (2k-1)!!(-k)(T-t)^{k-1} w_t dt +$$
$$+ C_{2k+1}^3 (2k-3)!![-(k-1)(T-t)^{k-2} w_t^3 dt +$$
$$+3(T-t)^{k-1} w_t^2 dw_t + 3(T-t)^{k-1} w_t dt] + \cdots +$$
$$+ C_{2k+1}^{2k-1}[-w_t^{2k-1} dt + (T-t)(2k-1) w_t^{2k-2} dw_t +$$
$$+2(T-t)(k-1)(2k-1) w_t^{2k-3} dt] +$$
$$+ 2k(2k+1) w_t^{2k-1} dt + (2k+1) w_t^{2k} dw_t.$$

ისევე როგორც $n = 2k$ შემთხვევაში, აქაც ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველ წევრს dt-თი შეესაბამება საწინააღმდეგო ნიშნით ასეთივე წევრი და ისინი ერთმანეთს გააბათილებენ. შესაბამისად, საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ:

$$dX_t = C_{2k+1}^3 (2k-3)!!3(T-t)^{k-1} w_t^2 dw_t + \cdots +$$
$$+ C_{2k+1}^{2k-1}(T-t)(2k-1) w_t^{2k-2} dw_t + (2k+1) w_t^{2k} dw_t =$$
$$= [C_{2k+1}^3 (2k-3)!!3(T-t)^{k-1} w_t^2 + \cdots +$$
$$+ C_{2k+1}^{2k-1}(T-t)(2k-1) w_t^{2k-2} + (2k+1) w_t^{2k}] dw_t.$$

1.1 თეორემის თანახმად, უკანასკნელ ტოლობაში კვადრატული ფრჩხილების შიგნით მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს $E[(2k+1) w_T^{2k} \big| \Im_t^w]$ პირობითი მათემატიკური ლოდინის გაშლას, ანუ ვაქვს:

$$dX_t = E[(2k+1) w_T^{2k} \big| \Im_t^w] dw_t.$$

თუ ახლა $X_T = X_0 + \int_0^T dX_t$ ტოლობაში ჩავსვავთ მიღებულ სტოქასტურ დიფერენციალს და გავითვალისწინებთ თანაფარდობებს: $X_T = E[w_T^{2k+1} \big| \Im_T^w] = w_T^{2k+1}$ და $X_0 = E[w_T^{2k+1} \big| \Im_0^w] = E w_T^{2k+1}$, დავინახავთ, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$w_T^{2k+1} = E[w_T^{2k+1}] + \int_{(0,T]} E\{[(w_T^{2k+1})'_x \big| \Im_t^w]\} dw_t.$$

ამით თეორემის დამტკიცება $n = 2k+1$ შემთხვევისათვისაც დასრულებულია. შესაბამისად, საბოლოოდ დამტკიცდა (2.1) წარმოდგენის სამართლიანობა. □

თეორემა 2.2. ნებისმიერი პოლინომიალური $P_n(x)$ ფუნქციისთვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$P_n(w_T) = E[P_n(w_T)] + \int_0^T E\{[P_n(w_T)]'_x \big| \Im_t^w\} dw_t \qquad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (2.2)$$

სადაც $\left[P_n(w_T)\right]_x' := \left[P_n(x)\right]_x' \Big|_{x=W_T}$

დამტკიცება: დებულების სამართლიანობა მარტივად გამომდინარეობს 2.1 თეორემიდან, გაწარმოების ოპერატორის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და სტოქასტური ინტეგრალის წრფივობის თვისებების გათვალისწინებით. □

§ 3
ერთი ცვლადის კვადრატით ინტეგრებადი ვინერის ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

მას შემდეგ რაც დავამტკიცებულია მარტინგალური წარმოდგენის თეორემა ვინერის პოლინომიალური ფუნქციონალებისათვის, შევამოწმოთ წარმოდგენის სამართლიანობა უფრო ზოგადი სახის ფუნქციონალებისათვის.

შემოვიღოთ წონის ფუნქცია $\rho(x,T) := e^{-\frac{x^2}{2T}}$ და აღვნიშნოთ $L_{2,T} := L_2[R^1;\rho(x,T)]$ სიმბოლოთი ზომად ფუნქციათა სივრცე $\|g\|_{2,T} := \|g\rho(T)\|_2$ სასრული ნორმით.

ლემა 1.1. $L_{2,T}$ სივრცე არის ბანახის სივრცე $\{x^n\rho(x,T)\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, ბაზისით.

დამტკიცება: გამოვიყენოდ ელემენტალური უტოლობა $x^2 \geq 2|x|-1$, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\rho(x,T) = e^{-\frac{x^2}{2T}} \leq e^{-\frac{2|x|-1}{2T}} = e^{-\frac{|x|}{T}} \cdot e^{\frac{1}{2T}} := ce^{-\delta|x|}.$$

შესაბამისად პირველ პარაგრაფში დამტკიცებული 1.2 თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ რომ ლემა სამართლიანია. □

<u>შენიშვნა</u>: გასაგებია, რომ თუ $0 < \alpha < 1$, მაშინ $\|\cdot\|^2_{2,T} \leq \|\cdot\|^2_{2,T/\alpha}$ და შესაბამისად, $L_{2,T/\alpha} \subset L_{2,T}$ $(0 < \alpha < 1)$.

გამომდინარე 1.1 ლემიდან, $L_{2,T}$ სივრცის ელემენტები წარმოადგენენ პოლინომთა მიმდევრობების შეწონილ ზღვრებს. როგორც ზემოთ ვნახეთ (იხ. თეორემა 2.2), პოლინომებისათვის ადგილი აქვს მარტინგალური წარმოდგენის თეორემებს. ისმის კითხვა: იქნება თუ არა მარტინგალური წარმოდგენის თეორემები სამართლიანი $L_{2,T}$ სივრცის ფუნქციებისთვის?

თეორემა 3.1. დავუშვათ, რომ უწყვეტად დიფერენცირებადი $f \in C^1(R)$ ფუნქცია ისეთია, რომ $f_x{}' \in L_{2,T}$, მაშინ (P-თ.ჯ.) არსებობს ინტეგრალი

$$\int_{(0,T]} E[f(w_T)'_x \big| \Im^w_t] dw_t .$$

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ (იხ. Липцер, Шириаев 1974, § 4.2):

$$E\int_{(0,T]} \{E[f(w_T)_x{}' \big| \Im^w_t]\}^2 dt < \infty$$

მართლაც, იენსენის უტოლობებისა და ფუბინის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E\int_{(0,T]} \{E[f(w_T)'_x \big| \Im^w_t]\}^2 dt \leq \int_{(0,T]} EE\{[f(w_T)'_x]^2 \big| \Im^w_t\} dt \leq$$

$$\le \int_{(0,T]} E[f(w_T)'_x]^2 dt = \|f'\|^2_{2,T} \cdot \int_{(0,T]} dt = T \cdot \|f'\|^2_{2,T} < \infty .$$

თეორემა 3.2. დავუშვათ, რომ $f \in C^1(R) \cap L_{2,T}$, და რაიმე α რიცხვისათვის, $0 < \alpha < 1$, $f' \in L_{2,T/\alpha}$, მაშინ სამართლიანია წარმოდგენა:

$$f(w_T) = E[f(w_T)] + \int_{(0,T]} E[f(w_T)_x' | \Im_t^w] dw_t \qquad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (3.1)$$

დამტკიცება: თეორემის პირობებში, რადგანაც $f' \in L_{2,T/\alpha}$, მოიძებნება პოლინომთა ისეთი $Q_n(x)$ მიმდევრობა, რომ ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n(x) - f'(x)\|_{L_{2,T/\alpha}} = 0 .$$

განვმარტოთ $Q_n(x)$ პოლინომების საშუალებით ახალი $P_n(x)$ პოლინომები შემდეგი თანაფარდობებით:

$$P_n(x) := f(0) + \int_0^x Q_n(y)dy , \quad n = 1,2,... .$$

ვაჩვენოთ, რომ პოლინომთა ახალი მიმდევრობისათვის ადგილი აქვს კრებადობას:

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(x) - f(x)\|_{L_{2,T}} = 0 .$$

მართლაც, თუ ვისარგებლებთ იგივეობით:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)dy ,$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\|P_n(x) - f(x)\|^2_{L_{2,T}} = \left\| f(0) + \int_0^x Q_n(y)dy - f(0) - \int_0^x f'(y)dy \right\|^2_{L_{2,T}} =$$

$$= \left\| \int_0^x [Q_n(y) - f'(y)]dy \right\|^2_{L_{2,T}} .$$

ადვილი დასანახია, რომ $\|\cdot\|_{2,T}$ ნორმის განმარტებისა და ჰელდერის უტოლობის ძალით, სამართლიანია შეფასება:

$$\|P_n(x) - f(x)\|^2_{L_{2,T}} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\int_0^x [Q_n(y) - f'(y)]dy\}^2 e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \int_0^{|x|} [Q_n(y) - f'(y)]^2 dy e^{-\frac{x^2}{2T}} dx .$$

შიგა ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება გავამრავლოთ და გავყოთ $e^{\frac{y^2\alpha}{2T}}$-ზე და გავითვალიწინოთ რომ $e^{\frac{y^2\alpha}{2T}}$ ფუნქცია ზრდადია y-ის მიმართ (შესაბამისად უტოლობა კიდევ უფრო გაძლიერდება, თუ $[0,x]$ ინტერვალზე ამ ფუნქციაში y-ს შევცვლით x-ით). შემდეგ გავზარდოთ ინტეგრალის საზღვარი და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\|P_n(x)-f(x)\|^2_{L_{2,T}} \le \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\int_0^{|x|}[Q_n(y)-f'(y)]^2 e^{-\frac{y^2\alpha}{2T}} e^{\frac{y^2\alpha}{2T}} dy e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\int_{-\infty}^{+\infty}[Q_n(y)-f'(y)]^2 e^{-\frac{y^2\alpha}{2T}} e^{\frac{x^2\alpha}{2T}} dy e^{-\frac{x^2}{2T}} dx \le$$

$$\le \|Q_n(x)-f'(x)\|^2_{L_{2,T/\alpha}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}|x| e^{-\frac{x^2(1-\alpha)}{2T}} dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

აქ $P_n(x)$ არის პოლინომი და ამიტომ $P_n(w_T)$ შემთხვევითი სიდიდისათვის 2.2 თეორემის თანახმად სამართლიანია წარმოდგენა:

$$P_n(w_T) = E[P_n(w_T)] + \int_0^T E\{[P_n(w_T)]'_x \big| \Im_t^w\} dw_t \qquad \text{(P- თ.ყ.)} \qquad (3.2)$$

დამტკიცების დასასრულებლად შევამოწმოთ, რომ (3.2) წარმოდგენის თითოეული შესაკრები კრებადია (3.1) წარმოდგენის შესაბამისი შესაკრებისკენ. კრებადობა დავამტკიცოდ L_2-ში (საიდანაც, თავის მხრივ, გამომდინარეობს კრებადობა L-ში და ისეთი ქვემიმდევრობის არსებობა, რომელიც კრებადია თითქმის ყველგან). ვინაიდან $w_T \sim N(0,T)$, ამიტომ გვაქვს:

$$E[f(w_T)-P_n(w_T)]^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-P_n(x)]^2 e^{-\frac{x^2}{2T}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\|f(x)-P_n(x)\|^2_{L_{2,T}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

ე.ი (3.2) თანაფარდობის მარცხენა მხარე კრებადია (3.1) თანაფარდობის მარცხენა მხრისკენ:

$$\lim_{n\to\infty}\|f(w_T)-P_n(w_T)\|^2_{L_2} = 0.$$

აქედან თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ (3.2) თანაფარდობის მარცხენა მხარის პირველი შესაკრები კრებადია შესაბამისი გამოსახულებისაკენ (3.1) თანაფარდობაში. ვაჩვენოთ, რომ კრებადობას ადგილი აქვს მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებშიც.

სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გამოყენებით, იენსენის უტოლობის საფუძველზე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E\{\int_0^T E[(f'(w_T)-Q_n(w_T))\big|\Im_t^w]dw_t\}^2 = E\{\int_0^T E[(f'(w_T)-Q_n(w_T))\big|\Im_t^w]^2 dt\} \le$$

$$\le E\{\int_0^T E[(f'(w_T)-Q_n(w_T))^2\big|\Im_t^w]dt\} = \int_0^T E[f'(w_T)-Q_n(w_T)]^2 dt \le$$

$$\le \|f'(x)-Q_n(x)\|^2_{L_{2,T/\alpha}} \cdot \int_0^T dt = T\cdot\|f'(x)-Q_n(x)\|^2_{L_{2,T/\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

ანუ მივიღეთ, რომ (3.2) წარმოდგენის მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებთა მიმდევრობა მიისწრაფვის (3.1) წარმოდგენის შესაბამისი წევრისაკენ. თუ ახლა გადავალთ ზღვარზე (3.2) თანაფარდობაში, როცა $n\to\infty$, მაშინ ყოველივე ზემოთთქმულის გათვალისწინებით, დავრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. □

საზოგადოდ იმის მოთხოვნა, რომ ფუნქციას გააჩნდეს პირველი რიგის წარმოებული, საკმაოდ მკაცრი შეზღუდვაა. განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც f ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული და შევამოწმოთ ამ შემთხვევაში შესაბამისი წარმოდგენის სამართლიანობა.

თეორემა 3.3. დავუშვათ, რომ f ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული ∂f, ისეთი, რომ $\partial f \in L_{2,T}$, მაშინ (P-თ.ყ.) არსებობს ინტეგრალი:

$$\int_0^T E[\partial f(w_T)\big|\Im_t^w]dw_t .$$

დამტკიცება: თეორემის სამართლიანობაში დასარწმუნებლად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ:

$$E\int_0^T \{E[\partial f(w_T)\big|\Im_t^w]\}^2 dt < \infty .$$

მართლაც, იენსენის უტოლობებისა და ფუბინის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E\int_0^T \{E[\partial f(w_T)\big|\Im_t^w]\}^2 dt \le \int_0^T EE\{[\partial f(w_T)]^2\big|\Im_t^w\}dt \le$$

$$\le \int_0^T E[\partial f(w_T)]^2 dt = \|\partial f\|_{2,T}^2 \cdot T < \infty .$$

თეორემა 3.4. დავუშვათ, რომ $f \in L_{2,T/\alpha}$, $0<\alpha<1$ ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული ∂f, ისეთი, რომ $\partial f \in L_{2,T/\beta}$, $0<\beta<1/2$, მაშინ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$f(w_T) = E[f(w_T)] + \int_0^T E[\partial f(w_T)\big|\Im_t^w]dw_t \qquad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (3.3)$$

დამტკიცება: თეორემის პირობებში, რადგანაც $f \in L_{2,T/\alpha}$, $\partial f \in L_{2,T/\beta}$, ამიტომ განმარტებულია f ფუნქციის სობოლევის საშუალო:

$$f_\varepsilon := T_\varepsilon f = \varepsilon^{-1}\kappa\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)dy = \kappa\int_{-1}^{1} f(x+\varepsilon y)\zeta\left(y\right)dy ,$$

სადაც

$$\zeta(x) := \begin{cases} \exp\{|x|^2(|x|^2-1)^{-1}\}, \ \textit{როცა} \quad |x|^2 \le 1; \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad , \ \textit{როცა} \quad |x|^2 > 1 \end{cases}$$

და

$$\kappa = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x)dx\right)^{-1} .$$

1.5 თეორემის თანახმად ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$\|f_\varepsilon(x) - f(x)\|_{L_{2,T/\alpha}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

და

$$\left\|\partial f_{\varepsilon}(x)-\partial f(x)\right\|_{L_{2,T/\beta}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 .$$

1.6 თეორემისა და მის შემდეგ მოყვანილი შენიშვნის თანახმად f_{ε} ფუნქცია აკმაყოფილებს 3.1 თეორემის პირობებს. შესაბამისად, მისთვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$f_{\varepsilon}(w_T)=E[f_{\varepsilon}(w_T)]+\int\limits_{(0,T]} E[f_{\varepsilon}(w_T)_x{}'\left|\Im_t^w\right.]dw_t \qquad (\text{P- თ.ყ.}) \qquad (3.4)$$

დავამტკიცოთ (3.4) წარმოდგენის თითოეული წევრის კრებადობა (3.3) წარმოდგენის შესაბამისი წევრისკენ. ცხადია, რომ:

$$E[f(w_T)-f_{\varepsilon}(w_T)]^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-f_{\varepsilon}(x)]^2 e^{-\frac{x^2}{2T}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\left\|f(x)-f_{\varepsilon}(x)\right\|_{L_{2,T}}^2\le\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\left\|f(x)-f_{\varepsilon}(x)\right\|_{L_{2,T/\alpha}}^2\xrightarrow{\varepsilon\to\infty}0 .$$

აქედან თავისთავად გამომდინარეობს წარმოდგენის მარჯვენა მხარეში მდგომი პირველი წევრის კრებადობაც შესაბამისი წევრისკენ. ვაჩვენოთ მეორე შესაკრებში მყოფი წევრების კრებადობა. იენსენის უტოლობის, სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$E\{\int\limits_0^T E[(\partial f(w_T)-\partial f_{\varepsilon}(w_T))\left|\Im_t^w\right.]dw_t\}^2=E\{\int\limits_0^T E[(\partial f(w_T)-\partial f_{\varepsilon}(w_T))\left|\Im_t^w\right.]^2dt\}\le$$

$$\le E\{\int\limits_0^T E[(\partial f(w_T)-\partial f_{\varepsilon}(w_T))^2\left|\Im_t^w\right.]dt\}=\int\limits_0^T E[\partial f(w_T)-\partial f_{\varepsilon}(w_T)]^2dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\left\|\partial f-\partial f_{\varepsilon}\right\|_{L_{2,T}}^2\cdot\int\limits_0^T dt\le\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\left\|\partial f-\partial f_{\varepsilon}\right\|_{L_{2,T/\beta}}^2\cdot T\xrightarrow{\varepsilon\to\infty}0 .$$

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ (3.4) წარმოდგენის თითოეული წევრი მიისწრაფის (3.3) წარმოდგენის შესაბამისი წევრებისკენ. შესაბამისად, თუ ჩვენ გადავალთ ზღვარზე (3.4) თანაფარდობაში, როცა $\varepsilon\to 0$, მივიღებთ (3.3) წარმოდგენას. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. □

უკანასკნელი თეორემის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ $w_T^+, w_T^-, |w_T|$ შემთხვევითი სიდიდეები (რომლებიც მიიღება თუ w_T შემთხვევით სიდიდეს ჩავსვამთ შესაბამისად შემდეგ ფუნქციებში x^+, x^- და $|x|$). x^+, x^- და $|x|$ ფუნქციები არ არიან წარმოებადი ჩვეულებრივი აზრით, მაგრამ მათ აქვთ განზოგადებული წარმოებული. ვნახოთ რას მოგვცემს ამ შემთხვევაში თეორემა 3.4.

მაგალითი 3.1. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე w_T^+. ამ შემთხვევაში

$$\partial w_T^+=\begin{cases}1, \text{როცა } w_T>0;\\ 0, \text{როცა } w_T\le 0\end{cases}$$

ანუ

$$\partial w_T^+=I_{\{w_T>0\}}$$

(ვინაიდან $\partial x^+=I_{\{x>0\}}$).

გამოვითვალოთ (3.3) წარმოდგენის მარჯვენა მხარეში მდგომი წევრები. ერთის მხრივ, გვაქვს:

$$Ew_T^+ = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} x e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = -\frac{T}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2T}} d(-\frac{x^2}{2T}) = -\frac{T}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} \Big|_0^\infty = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} .$$

მეორეს მხრივ, ვინერის პროცესის მარკოვულობის თვისებისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილის თვისების (იხ. Ширяев 1980, თეორემა II.4.3) თანახმად არსებობს ბორელის აზრით ზომადი ისეთი m ფუნქცია, რომ:

$$E[\partial f(w_T) \big| \Im_t^w] = E[I_{w_T > 0} \big| \Im_t^w] = E[I_{w_T > 0} \big| w_t] = P(w_T > 0 \big| w_t) := m(w_T) ,$$

სადაც

$$\begin{aligned} m(x) &= P(w_T > 0 \big| w_t = x) = P(w_T - w_t + w_t > 0 \big| w_t = x) = \\ &= P(w_T - w_t > -x \big| w_t = x) = P(w_T - w_t > -x) = \\ &= 1 - P(w_T - w_t \le -x) = 1 - \underset{0,T-t}{\Phi}(-x) = \underset{0,T-t}{\Phi}(x) . \end{aligned}$$

აქ $\underset{0,T-t}{\Phi}(x)$ არის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ნულოვანი საშუალოთი და დისპერსიით $T-t$. ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ წარმოდგენა:

$$w_T^+ = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} + \int_0^T \Phi_{0,T-t}(w_T) dw_t . \quad \square$$

მაგალითი 3.2. ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$w_T^- = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} + \int_0^T (-1 + \Phi_{0,T-t}(w_T)) dw_t .$$

მაგალითი 3.3. წინა ორი მაგალითის და $|x| = x^+ + x^-$ ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ:

$$|w_T| = 2\sqrt{\frac{T}{2\pi}} + \int_0^T (-1 + 2\Phi_{0,T-t}(w_T)) dw_t .$$

მაგალითი 3.4.

$$|w_T - x| = \sqrt{\frac{2T}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2T}} + x(-1 + 2\Phi_{0,T-t}(w_T) + \int_0^T (1 - 2\Phi_{0,T-t}(x - w_T)) dw_t .$$

მაგალითი 3.5.

$$\max(w_T, K) = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} e^{-\frac{K^2}{2T}} + K\Phi_{0,T}(K) + \int_0^T (1 - \Phi_{0,T-t}(K - w_t)) dw_t .$$

მაგალითი 3.6.

$$I_{\{W_T > 0\}} = \frac{1}{2} + \int_0^T \Phi_{0,T-S}(w_T) dw_S .$$

უკანასკნელი წარმოდგენის სისწორის შესამოწმებლად შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$f^{\beta}(x) := (x/(2\beta)+1/2)I_{[-\beta,\beta]}(x) + I_{(\beta,\infty)}(x) =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad x < -\beta; \\ x/(2\beta)+1/2, & \text{როცა} \quad -\beta \le x \le \beta; \\ 1/2, & \text{როცა} \quad x > \beta. \end{cases}$$
$$\bar{\partial}/\partial x(f^{\beta})(x) := 1/(2\beta) I_{(-\beta,\beta)}(x).$$

განვმარტოთ $f_{\varepsilon}^{\beta}(x)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f_{\varepsilon}^{\beta}(x) = \varepsilon^{-1}\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f^{\beta}(y)dy .$$

ვისარგებლოთ 1.3 თეორემით. გვაქვს:

$$f_{\varepsilon}^{\beta}(w_T) = E[f_{\varepsilon}^{\beta}(w_T)] + \int_0^T E[\partial/\partial x(f_{\varepsilon}^{\beta}(w_T)) \big| \Im_t^w] dw_t . \qquad \text{(P-თ.ყ.)}$$

თუ უკანასკნელ თანაფარდობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \to 0$, გვექნება:

$$f^{\beta}(w_T) = E[f^{\beta}(w_T)] + \int_0^T E[\partial/\partial x(f^{\beta}(w_T)) \big| \Im_t^w] dw_t , \qquad \text{(P-თ.ყ.)}$$

საიდანაც β-ს ნულისაკენ მისწრაფების შემდეგ მივიღებთ სასურველ წარმოდგენას. □

§ 4
ორი ცვლადის ვინერის პოლინომიალური ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

თეორემა 4.1. ვთქვათ $P_m(x,y)$ არის m-ური რიგის პოლინომიალური ფუნქცია. მაშინ (P-თ.ყ.) სამართლიანია წარმოდგენა:

$$P_m(w_T, w_S) = E[P_m(w_T, w_S)] +$$
$$+\int_0^{T\vee S}\{E[\frac{\partial}{\partial x}(P_m(w_T,w_S))\Big|\Im_t^w]\cdot I_{\{t\le T\}} + E[\frac{\partial}{\partial y}(P_m(w_T,w_S))\Big|\Im_t^w]\cdot I_{\{t\le S\}}\}dw_t \tag{4.1}$$

სადაც
$$\frac{\partial}{\partial x}(P_m(w_T,w_S)) := [\frac{\partial}{\partial x}P_m(x,y)]\Big|_{x=w_T,\,y=w_S}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(P_m(w_T,w_S)) := [\frac{\partial}{\partial y}P_m(x,y)]\Big|_{x=w_T,\,y=w_S}.$$

დამტკიცება: ჯერ დავამტკიცოთ თეორემა ორი ცვლადის ხარისხოვანი ფუნქციონალებისათვის $w_T^n \cdot w_S^m$ (ანუ განვიხილოთ ხარისხოვანი ფუნქცია $P_{n+m}(x,y) = x^n \cdot y^m$). გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $(T \ge S)$. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$X_t := E[(w_T^n \cdot w_S^m)\Big|\Im_t^w].$$

ფიქსირებული t-სათვის განვიხილოთ შემთხვევები: $S \ge t$ და $S \le t$.

პირველი შემთხვევა: $S \ge t$. პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$X_t = E[(w_T^n \cdot w_S^m)\Big|\Im_t^w] = E\{[w_S^m E(w_T^n\Big|\Im_S^w)]\Big|\Im_t^w\}.$$

აქედან, თუ ვისარგებლებთ $E(w_T^n\Big|\Im_S^w)$ $(T \ge S)$ და $E(w_S^{m+i}\Big|\Im_t^w)$ $(S \ge t)$ პირობითი მათემატიკური ლოდინების ზემოთ მიღებული წარმოდგენებით (იხ. თეორემა 1.1), ადვილად მივიღებთ, რომ:

$$X_t = E\{[w_S^m \sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} w_S^i]\Big|\Im_t^w\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}[C_n^i(n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} E(w_S^{m+i}\Big|\Im_t^w)] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\{C_n^i(n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} \sum_{j=0}^{m+i}[C_{m+i}^j(m+i-j-1)!!(S-t)^{\frac{m+i-j}{2}} w_t^j]\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m+i} C_n^i C_{m+i}^j (n-i-1)!!(m+i-j-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}}(S-t)^{\frac{m+i-j}{2}} w_t^j.$$

იტოს ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ სტოქასტური დიფერენციალი dX_t. გვაქვს:

$$dX_t=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m+i}C_n^iC_{m+i}^j(n-i-1)!!(m+i-j-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}}\times$$
$$\times[j(S-t)^{\frac{m+i-j}{2}}w_t^{j-1}dw_t+\frac{1}{2}j(j-1)(S-t)^{\frac{m+i-j}{2}}w_t^{j-2}dt-$$
$$-\frac{m+i-j}{2}(S-t)^{\frac{m+i-j}{2}-1}w_t^jdt].$$

ორმაგი ჯამის გაშლისას შევამჩნევთ, რომ თითოეულ წევრს, რომელიც შეიცავს dt-ს შეესაბამება ანალოგიური წევრი ოღონდ მოპირდაპირე ნიშნით. მართლაც, განვიხილოთ w_t-ს ერთიდაიგივე ხარისხის მქონე წევრები და შევადაროთ ერთმანეთს მათი კოეფიციენტები. გავითვალისწინოთ, რომ ერთი და იგივე j-სათვის კვადრატული ფრჩხილების შიგნით მდგომ მეორე გამოსახულებაში w_t-ს ხარისხი 2-ით ნაკლებია მესამე შესაკრებში w_t-ს ხარისხზე. ამიტომ ერთმანეთს შევადაროთ მეორე და მესამე შესაკრებების ის წევრები, რომლებშიც მონაწილეობს w_t^j და ვნახოთ, რომ სწორედ ამ შესაკრებებს აქვთ მოდულით ტოლი და ნიშნით განსხვავებული კოეფიციენტები. ამოვწეროთ ეს მსგავსი წევრები. პირველი მათგანი აღვნიშნოთ $a_1(j+2)$ სიმბოლოთი, ხოლო მეორე კი $a_2(j)$-ით. გვაქვს:

$$a_1(j+2)=\frac{1}{2}C_n^iC_{m+i}^{j+2}(m+i-j-3)!!(j+2)(j+1)(S-t)^{\frac{m+i-j-2}{2}}w_t^jdt$$

და

$$a_2(j)=-\frac{1}{2}C_n^iC_{m+i}^{j}(m-i-j-1)!!(m+i-j)(S-t)^{\frac{m+i-j-2}{2}}w_t^jdt$$

განვიხილოთ ამ ორი წევრის შეფარდება:

$$\frac{a_1(j+2)}{a_2(j)}=-\frac{C_{m+i}^{j+2}(m+i-j-3)!!(j+2)(j+1)}{C_{m+i}^{j}(m+i-j-1)!!(m+i-j)}.$$

თუ ვისარგებლებთ ბინომის კოეფიციენტების თვისებებით, მივიღებთ:

$$\frac{a_1(j+2)}{a_2(j)}=-\frac{j!(m+i-j)!(m+i-j-3)!!(j+2)(j+1)}{(i+2)!(m+i-j-2)!(m+i-j-1)!!(m+i-j)}=-1.$$

ამიტომ $a_1(j+2)$ და $a_2(j)$ წევრები გააბათილებენ ერთმანეთს და ადვილი დასანახია, რომ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$dX_t=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m+i}C_n^iC_{m+i}^j(n-i-1)!!(m+i-j-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}}\cdot j\cdot(S-t)^{\frac{m+i-j}{2}}w_t^{j-1}dw_t.$$

უკანასკნელი თანაფარდობის მარჯვენა მხარეში dw_t-ს წინ მდგომი თანამამრავლი არის $E\{[E(w_T^n\cdot w_S^m|\Im_S^w)]'_{w_S}|\Im_t^w\}$ პირობითი მათემატიკური ლოდინის გაშლა (როგორც ცნობილია არსებობს ისეთი ბორელის g ფუნქცია, რომ $E(w_T^nw_S^m|\Im_S^w)=g(w_S)$. შესაბამისად, $[E(w_T^n\cdot w_S^m|\Im_S^w)]'_{w_S}$ გამოსახულების ქვეშ გვესმის აღნიშნული g ფუნქციის x-ის მიმართ წარმოებულში x-ის ადგილას ჩასმული w_S: $[g(x)]'_x\Big|_{x=w_S}$). მართლაც, 1.1 თეორემისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$E\{[E(w_T^n\cdot w_S^m|\Im_S^w)]'_{w_S}|\Im_t^w\}=E\{[w_S^mE(w_T^n|\Im_S^w)]'_{w_S}|\Im_t^w\}=$$

$$= E\{[w_S^m \sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} w_S^i]'_{w_S} \Big| \Im_t^w\} =$$

$$= E\{[\sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} w_S^{m+i}]'_{w_S} \Big| \Im_t^w\} =$$

$$= E\{\sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} w_S^{m+i-1}(m+i) \Big| \Im_t^w\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \{C_n^i (n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} (m+i) E[w_S^{m+i-1} \Big| \Im_t^w]\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} (m+i) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m+i-1} C_{m+i-1}^j (m+i-2)!!(S-t)^{\frac{m+i-j-1}{2}} w_t^j =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m+i-1} C_n^i (n-i-1)!!(T-S)^{\frac{n-i}{2}} (m+i) C_{m+i-1}^j (m+i-2)!!(S-t)^{\frac{m+i-j-1}{2}} w_t^j .$$

თუ ახლა შევცვლით $(j+1)$-ს j-თი და ვისარგებლებთ $C_{n-1}^i \cdot n = C_n^i (n-i)$ ტოლობით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$dX_t = E\{[E(w_T^n \cdot w_S^m \Big| \Im_S^w)]'_{w_S} \Big| \Im_t^w\} dw_t .$$

ახლა განვიხილოთ **მეორე შემთხვევა**: $S \le t$. 1.1 თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$X_t = E[(w_T^n \cdot w_S^m) \Big| \Im_t^w] = w_S^m E(w_T^n \Big| \Im_t^w) = w_S^m \sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-i-1)!!(T-t)^{\frac{n-i}{2}} w_t^i .$$

იტოს ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ X_t შემთხვევითი პროცესის სტოქასტური დიფერენციალი. გვაქვს:

$$dX_t = w_S^m \sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-i-1)!![i(T-t)^{\frac{n-i}{2}} w_t^{i-1} dw_t +$$

$$+ \frac{1}{2} i(i-1)(T-t)^{\frac{n-i}{2}} w_t^{i-2} dt - \frac{n-i}{2}(T-t)^{\frac{n-i}{2}-1} w_t^i dt] .$$

ჯამის გაშლისას, ისევე როგორც ზემოთ, ძნელი არ არის შევამჩნიოთ, რომ თვითოეულ წევრს, რომელიც შეიცავს dt-ს შეესაბამება ანალოგიური წევრი, რომელიც მოდულით მისი ტოლია და ნიშნით მოპირდაპირე. მართლაც, ზემოთ აღნიშნულის ანალოგიურად ამოვწეროთ w_t-ს ერთიდაიგივე i-ური ხარისხის შემცველი წევრები. ესენია:

$$a_1(i+2) = \frac{1}{2} C_n^{i+2} (n-i-3)!!(i+2)(i+1)(T-t)^{\frac{n-i-2}{2}} w_t^i dt$$

და

$$a_2(i) = -\frac{1}{2} C_n^i (n-i-1)!!(n-i)(T-t)^{\frac{n-i-2}{2}} w_t^i dt .$$

განვიხილოთ ამ სიდიდეების შფარდება:

$$\frac{a_1(i+1)}{a_2(i)} = -\frac{C_n^{i+2}(n-i-3)!!(i+2)(i+1)}{C_n^i (n-i-1)!!(n-i)} .$$

ბინომის კოეფიციენტის თვისებების გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\frac{a_1(i+1)}{a_2(i)} = -\frac{i!(n-i)!(n-i-3)!!(i+2)(i+1)}{(i+2)!(n-i-2)!(n-i-1)!!(n-i)} = -1 .$$

ამიტომ ეს წევრები ერთმანეთს გააბათილებს და საბოლოოდ მივიღებთ, რომ:

$$dX_t = w_S^m \sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-i-1)!!\cdot i \cdot (T-t)^{\frac{n-i}{2}} w_t^{i-1} dw_t .$$

უკანასკნელი წარმოდგენის მარჯვენა მხარეში dw_t-ს წინ მდგომი თანამამრავლი არის $E\{[E(w_T^n \cdot w_S^m \left| \Im_S^w)\right]_{w_T}^{'} \left| \Im_t^w \right\}$ პირობითი მათემატიკური ლოდინის გაშლა. მართლაც, 1.1 თეორემისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გამოყენებით გვაქვს:

$$E[(w_T^n \cdot w_S^m)_{w_T}^{'} \left| \Im_t^w \right] = E[(w_S^m \cdot n \cdot w_T^{n-1}) \left| \Im_t^w \right] = w_S^m \cdot n \cdot E(w_T^{n-1} \left| \Im_t^w \right) =$$

$$= w_S^m \cdot n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (n-1-i-1)!!(T-t)^{\frac{n-i-1}{2}} w_t^{n-i} .$$

თუ აქ $(i+1)$-ს შევცვლით i-თი და ვისარგებლებთ $C_{n-1}^i \cdot n = C_n^i (n-i)$ ტოლობით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$dX_t = E[(w_T^n \cdot w_S^m)_{w_T}^{'} \left| \Im_t^w \right] dw_t .$$

ზემოთ მიღებული მიღებული შედეგებისა და $X_0 = E\left[w_T^n w_S^m\right]$ და $X_T = w_T^n w_S^m$ როცა $T \geq S$ ტოლობების გავითვალისწინებთ თანაფარდობიდან:

$$X_T = X_0 + \int_0^T dX_S$$

მივიღებთ, რომ (P-თ.ყ.) ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$w_T^n w_S^m = E(w_T^n w_S^m) + \int_0^T \left\{ E\{[E(w_T^n w_S^m \left| \Im_S^w)\right]_{w_S}^{'} \left| \Im_t^w \right\} I_{\{S \geq t\}} + E[(w_T^n w_S^m)_{w_T}^{'} \left| \Im_t^w \right] I_{\{S<t\}} \right\} dw_t .$$

ანალოგიური მსჯელობით, $T \leq S$ შემთხვევაში, ვრწმუნდებით, რომ (P-თ.ყ.) ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$w_T^n w_S^m = E(w_T^n w_S^m) + \int_0^S \left\{ E\{[E(w_T^n w_S^m \left| \Im_T^w)\right]_{w_T}^{'} \left| \Im_t^w \right\} I_{\{T \geq t\}} + E[(w_T^n w_S^m)_{w_S}^{'} \left| \Im_t^w \right] I_{\{T<t\}} \right\} dw_t .$$

პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გათვალისწინებით, ბოლო ორი ტოლობის გაერთიანების შედეგად, (P-თ.ყ.) მივიღებთ წარმოდგენას:

$$w_T^n w_S^m = E(w_T^n w_S^m) +$$

$$+ \int_0^{T \vee S} \left\{ E\{[E(w_T^n w_S^m \left| \Im_{S \wedge T}^w)\right]_{w_{S \wedge T}}^{'} \left| \Im_t^w \right\} I_{\{S \wedge T \geq t\}} + E[(w_T^n w_S^m)_{w_{S \vee T}}^{'} \left| \Im_t^w \right] I_{\{S \wedge T < t\}} \right\} dw_t . \quad (4.2)$$

შევამოწმოთ, რომ უკანასკნელი თანაფარდობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$w_T^n w_S^m = E(w_T^n w_S^m) + \int_0^{T \vee S} \{ E[(w_T^n w_S^m)_{w_T}^{'} \left| \Im_l^w \right] \cdot I_{\{t \leq T\}} + E[(w_T^n w_S^m)_{w_S}^{'} \left| \Im_t^w \right] \cdot I_{\{t \leq S\}} \} dw_t .$$

განვიხილოთ $T \geq S$ შემთხვევისთვის (4.2) წარმოდგენაში მონაწილე სტოქასტური ინტეგრალი. სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინის და ვინერის პროცესის ცნობილი თვისებების გათვალისწინებით გვაქვს:

$$I := \int_0^{T\vee S} \{E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] \cdot I_{\{t\le T\}} + E[(w_T^n w_S^m)'_{w_S} \left|\Im_t^w\right.] \cdot I_{\{t\le S\}}\} dw_t =$$

$$= \int_0^{T\vee S} \left\{ E\{[E(w_T^n w_S^m \left|\Im_{S\wedge T}^w\right.)'_{w_{S\wedge T}} \left|\Im_t^w\right.\} I_{\{S\wedge T\ge t\}} + E\{[E(w_T^n w_S^m \left|\Im_{S\vee T}^w\right.)]'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.\} I_{\{S\wedge T< t\}} \right\} dw_t =$$

$$= \int_0^S E\{[E(w_T^n w_S^m \left|\Im_S^w\right.)]'_{w_S} \left|\Im_t^w\right.\} dw_t + \int_S^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t .$$

თუ უკანასკნელ გამოსახულებას დაუმატებთ და გამოვაკლებთ სიდიდეს

$$\int_0^S E\left[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.\right] dw_t ,$$

მაშინ დავინახავთ, რომ:

$$I = \int_0^S E\{[E(w_T^n w_S^m \left|\Im_S^w\right.)]'_{w_S} \left|\Im_t^w\right.\} dw_t - \int_0^S E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t + \int_0^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t =$$

$$= \int_0^S \left\{ E\{[E(w_T^n w_S^m \left|\Im_S^w\right.)]'_{w_S} \left|\Im_t^w\right.\} - E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] \right\} dw_t + \int_0^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t .$$

აქედან ვინერის პროცესისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების გამოყენებით, მივიღებთ, რომ:

$$I = \int_0^S \left\{ E\{[E(w_T^n w_S^m \left|\Im_S^w\right.)]'_{w_S} \left|\Im_t^w\right.\} - E\{E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_S^w\right.] \left|\Im_t^w\right.\} \right\} dw_t + \int_0^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t =$$

$$= \int_0^S E\{(w_S^m)'_{w_S} E(w_T^n \left|\Im_S^w\right.) + w_S^m [E(w_T^n \left|\Im_S^w\right.)]'_{w_S} - E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \mid \Im_S^w] \mid \Im_t^w\} dw_t =$$

$$+ \int_0^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t = \int_0^S E[(w_S^m)'_{w_S} E(w_T^n \left|\Im_S^w\right.) \left|\Im_t^w\right.] dw_t + \int_0^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t =$$

$$= \int_0^S E\{E[(w_S^m)'_{w_S} w_T^n \left|\Im_S^w\right.] \left|\Im_t^w\right.\} dw_t + \int_0^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t =$$

$$= \int_0^S E[(w_S^m)'_{w_S} w_T^n \left|\Im_t^w\right.] dw_t + \int_0^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t =$$

$$= \int_0^S E[(w_S^m w_T^n)'_{w_S} \left|\Im_t^w\right.] dw_t + \int_0^T E[(w_T^n w_S^m)'_{w_T} \left|\Im_t^w\right.] dw_t .$$

ამრიგად ჩვენ მივიღეთ, რომ (4.2) წარმოდგენა არის დასამტკიცებელი წარმოდგენა ხარისხოვანი ფუნქციონალებისთვის.

თუ გავითვალისწინებთ პირობითი მათემატიკური ლოდინის, მათემატიკური ლოდინის, სტოქასტური ინტეგრალისა და გაწარმოების ოპერატორის წრფივობის თვისებას, უკვე მიღებული შედეგიდან ხარისხოვანი ფუნქციონალებისთვის ადვილად მივიღებთ დასამტკიცებელ თეორემას პოლინომიალური ფუნქციონალებისთვისაც. $\square$

§ 5
ორი ცვლადის კვადრატით ინტეგრებადი ვინერის ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

მას შემდეგ რაც დავამტკიცებულია ორი ცვლადის ვინერის პოლინომიალური ფუნქციონალებისთვის მარტინგალური წარმოდგენის თეორემების სამართლიანობა, აღნიშნული თეორემები განვაზოგადოთ ფუნქციონალთა უფრო ფართო კლასისთვის. ჩვენ შემოვიღებთ სპეციალური სივრცეს და ამ სივრცის ფუნქციონალებისათვის დავამტკიცებთ ინტეგრალური წარმოდგენის თეორემებს.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\rho(x,y,S,T) := e^{-\frac{x^2}{2S}-\frac{y^2}{2T}}$$

და

$$r(x,y,S,T) := \rho(x,y-x,S,T-S).$$

განვმარტოთ აგრეთვე სივრცე $L_{2,S,T} := L_2\left[R^2;\rho(x,y,S,T)\right]$ (შესაბამისად, $L_{2,S}^T := L_2\left[R^2; r(x,y,S,T)\right]$ ნებისმიერი ფიქსირებული $0 \le S < T$): ეს არის ზომად ფუნქციათა სივრცე შემდეგი სასრული ნორმით: $\|g\|_{2,S,T} = \|g\rho(S,T)\|_2$ (შესაბამისად, ${}_T\|g\|_{2,S} = \|gr(S,T)\|_2$).

ლემა 5.1. $L_{2,S}^T$ არის ბანახის სივრცე $\{x^k y^l r(x,y,S,T)\}_{k,l\ge 0}$ ბაზისით.

დამტკიცება: თუ ვისარგებლებთ ელემენტალური უტოლობით

$$2xy \le 1/\varepsilon\, x^2 + \varepsilon\, y^2,$$

მაშინ, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$r(x,y,S,T) := \rho(x,x-y,S,T-S) = e^{-\frac{x^2}{2S}-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}} \le$$
$$\le e^{-\frac{x^2}{2a}-\frac{y^2}{2b}} \le e^{-\frac{1}{2\min(a,b)}(x^2+y^2)} = e^{-\frac{1}{2\min(a,b)}\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}},$$

სადაც

$$a = T/(S(T-S)) - 1/(\varepsilon(T-S)),$$
$$b = 1/(T-S) - \varepsilon/(T-S).$$

გასაგებია, რომ თუ $S/T < \varepsilon < 1$, მაშინ $a>0, b>0$. ამიტომ 1.2 თეორემის თანახმად დამტკიცება დასრულებულია. □

თეორემა 5.1. ვთქვათ $f(x,y)$ ფუნქცია ისეთა, რომ $f \in C^2(R^2)$ და $\partial/\partial x(f), \partial/\partial y(f) \in L_{2,S,(T-S)}$ მაშინ (P-თ.ყ.) არსებობენ ინტეგრალები:

$$\int_0^T E\left[\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T,w_S)\middle|\Im_t^w\right] dw_t$$

და

$$\int_0^S E\left[\frac{\partial}{\partial w_S} f(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w\right] dw_t \quad .$$

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ:

$$E\int_{(0,T]} E[\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w]^2 dt < \infty$$

და

$$E\int_{(0,S]} E[\frac{\partial}{\partial w_S} f(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w]^2 dt < \infty .$$

მართლაც, იენსენის უტოლობისა და ფუბინის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E\int_0^T E\left[\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w\right]^2 dt \le \int_0^T EE\left[\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w\right]^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S)]^2 dt = \left\|\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right\|^2_{2,S,T-S} \cdot \int_{(0,T]} dt = \left\|\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right\|^2_{2,S,T-S} \cdot T < \infty.$$

ანალოგიურად მოწმდება ინტეგრალის არსებობა. □

თეორემა 5.2. ვთქვათ $f(x,y)$ ფუნქცია ისეთა, რომ $f \in C^2(R^2) \cap L_{2,S,T}$ და რაიმე $0 < \alpha < 1$-თვის $\partial/\partial x(f), \partial/\partial y(f), \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \in L_{2,S/\alpha,(T-S)/\alpha}$, მაშინ (P-თ.ყ.) ადგილი აქვს მარტინგალური წარმოდგენის თეორემას:

$$f(w_T, w_S) = E[f(w_T, w_S)] +$$
$$+ \int_0^{T\vee S} \left\{ E\left[\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w\right] \cdot I_{\{t \le T\}} + E\left[\frac{\partial}{\partial w_S} f(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w\right] \cdot I_{\{t \le S\}} \right\} dw_t . \qquad (5.1)$$

დამტკიცება: თეორემის პირობებში, რადგანაც $\partial/\partial x(f), \partial/\partial y(f) \in L_{2,S/\alpha,(T-S)/\alpha}$, მოიძებნება $Q_n(x,y)$ პოლინომიალურ ფუნქციათა ისეთი მიმდევრობა, რომ ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$Q_n(x,y) \xrightarrow{L_{2,S/\alpha,(T-S)/\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y), \text{ როცა } n \to \infty .$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$P_n(x,y) = -f(0,0) + f(x,0) + f(y,0) + \int_0^x \int_0^y Q_n(u,v) du dv .$$

შევამოწმოთ, რომ $P_n(x,y) \xrightarrow{L_{2,S,T-S}} f(x,y)$, როცა $n \to \infty$.

მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$P_n(x,y) = -f(0,0) + f(x,0) + f(y,0) + \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} f(u,v) du dv ,$$

მაშინ ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\left\|P_n(x,y)-f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}}=\left\|\int_0^x\int_0^y(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v))dudv\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^x\int_0^y(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v))dudv\right)^2 e^{-\frac{x^2}{2S}-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|\int_0^x\int_0^y\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2dudve^{-\frac{x^2}{2S}-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy\,.$$

შიგა ორჯერადი ინტეგრალის ინტეგრანდი გავამრავლოთ და გავყოთ $e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}$ გამოსახულებაზე. გვაქვს:

$$\left\|P_n(x,y)-f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}}\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|\int_0^x\int_0^y\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2 e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}e^{\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}dudve^{-\frac{x^2}{2S}-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy$$

დავადგინოთ $e^{\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა, როცა $u\in[0,x];\,v\in[0,y]$. ცხადია უდიდესი მნიშვნელობა მიიღწევა, როცა ა) $v=y$ და $u=x$ ან ბ) $v=0$ და $u=x$. განვიხილოთ ეს შემთხვევები ცალ-ცალკე.

ა). გვაქვს:

$$\left\|P_n(x,y)-f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}}\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|\int_0^x\int_0^y\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2 e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}dudve^{-\frac{(1-\beta)x^2}{2S}-\frac{(1-\alpha)(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy$$

ამიტომ ინტეგრალის საზღვრების გაზრდით $+\infty$-მდე მივიღებთ:

$$\left\|P_n(x,y)-f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}}\le$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2 e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}dudve^{-\frac{(1-\beta)x^2}{2S}-\frac{(1-\alpha)(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2 e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}dudv\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|e^{-\frac{(1-\beta)x^2}{2S}-\frac{(1-\alpha)(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy=$$

$$=\left\|Q_n(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S/\alpha,(T-S)/\alpha}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|e^{-\frac{(1-\beta)x^2}{2S}-\frac{(1-\alpha)(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy\,.$$

მივიღეთ ორი გამოსახულების ნამრავლი, რომელთაგან ერთი მიისწრაფის ნულისკენ. ვაჩვენოთ, რომ მეორე თანამამრავლი შემოსაზღრულია. მართლაც, თუ ვისარგებლებთ იენსენის უტოლობითა და 5.2 ლემით, მივიღებთ, რომ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|e^{-\frac{(1-\beta)x^2}{2S}-\frac{(1-\alpha)(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy\le\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|e^{-\frac{x^2}{2a'}-\frac{y^2}{2b'}}dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|e^{-\frac{y^2}{2b'}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-\frac{x^2}{2a'}}dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|e^{-\frac{y^2}{2b'}}dy\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-\frac{x^2}{2a'}}dx=c\cdot E|\xi|\cdot E|\eta|<\infty$$

სადაც $\xi\sim N(0,\sqrt{a'})$, $\eta\sim N(0,\sqrt{b'})$. ამიტომ საბოლოოდ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ:

$$\left\|P_n(x,y)-f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

ბ). ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left\|P_n(x,y)-f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}} \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|\int_0^x\int_0^y\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2 e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}dudve^{\frac{x^2\alpha}{2S}}\cdot e^{\frac{x^2\alpha}{2(T-S)}}e^{-\frac{x^2}{2S}-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|\int_0^x\int_0^y\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2 e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}dudve^{-\frac{x^2}{2a'}}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy$$

გავზარდოთ ინტეგრალების საზღვრები $+\infty$-მდე. გვაქვს:

$$\left\|P_n(x,y)-f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}} \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2 e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}dudve^{-\frac{x^2}{2a'}}\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(Q_n(u,v)-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right)^2 e^{-\frac{u^2\alpha}{2S}}\cdot e^{-\frac{(v-u)^2\alpha}{2(T-S)}}dudv\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|e^{-\frac{x^2}{2a'}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy =$$

$$= \left\|Q_n(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S/\alpha,(T-S)/\alpha}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x||y|e^{-\frac{x^2}{2a'}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}}dxdy$$

კვლავ მივიღეთ ორი გამოსახულების ნამრავლი, რომელთაგან ერთი მიისწრაფის ნულისკენ, ხოლო მეორე შემოსაზღვრულია. ამიტომ საბოლოოდ ვასკვნით, რომ:

$$\left\|P_n(x,y)-f(x,y)\right\|^2_{L_{2,S,(T-S)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

შევნიშნავთ, რომ თვითონ $P_n(x,y)$ ფუნქცია შედგება რამოდენიმე წევრისგან, რომელთაგან პირველი მუდმივი რიცხვია, მეორე და მესამე ერთი ცვლადის ფუნქციებია, რომელთათვისაც ჩვენ უკვე მიღებული გვაქვს მარტინგალური წარმოდგენის თეორემები, ხოლო რაც შეეხება მეოთხე წევრს ის არის ორმაგი ინტეგრალი პოლინომიდან. პოლინომისთვის მარტინგალური წარმოდგენის თეორემა მიღებული გვაქვს. პოლინომიდან ინტაგრალი რა თქმა უნდა ისევ პოლინომია და მაშასადამე, $P_n(x,y)$ პოლინომებისათვის მარტინგალური წარმოდგენის თეორემა ჩვენ უკვე მიღებული გვაქვს:

$$P_n(w_T,w_S)=E[P_n(w_T,w_S)]+$$

$$+\int_0^{T\vee S}\left\{E\left[\frac{\partial}{\partial w_T}P_n(w_T,w_S)\middle|\Im_t^w\right]\cdot I_{\{t\le T\}}+E\left[\frac{\partial}{\partial w_S}P_n(w_T,w_S)\middle|\Im_t^w\right]\cdot I_{\{t\le S\}}\right\}dw_t .$$

ადვილი დასანახია, რომ მიღებულ წარმოდგენაში ტოლობის მარცხენა მხარე საშუალო კვადრატული აზრით მიისწრაფის $f(w_T,w_S)$-კენ (შემოწმება ერთგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურია). შესაბამისად, მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები მიისწრაფის $E[f(w_T,w_S)]$-კენ. თეორემის დასამტკიცების დასასრულებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ:

$$\int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T}P_n(w_T,w_S)\big|\Im_t^w]dw_t \xrightarrow{L_2} \int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T}f(w_T,w_S)\big|\Im_t^w]dw_t ,\ \text{როცა}\ n\to\infty .$$

და

$$\int_0^S E[\frac{\partial}{\partial W_S} P_n(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w]dw_t \xrightarrow{L_2} \int_0^S E[\frac{\partial}{\partial w_S} f(w_T, w_S)\Big|\Im_t^w]dw_t, \text{ როცა } n \to \infty .$$

მართლაც, იენსენის უტოლობის, სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით ვღებულობთ, რომ:

$$E\left(\int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T}\{P_n(w_T, w_S) - f(w_T, w_S)\}\Big|\Im_t^w]dw_t\right)^2 \le$$

$$\le E\int_0^T (E[\frac{\partial}{\partial w_T}\{P_n(w_T, w_S) - f(w_T, w_S)\}\Big|\Im_t^w])^2 dt \le$$

$$\le E(\int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T}\{P_n(w_T, w_S) - f(w_T, w_S)\}\Big|\Im_t^w]^2 dt) \le$$

$$\le \int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T}\{P_n(w_T, w_S) - f(w_T, w_S)\}]^2 dt =$$

$$= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi S(T-S)}} \iint_{R^2} E[\frac{\partial}{\partial x}\{P_n(x,y) - f(x,y)\}]^2 e^{-\frac{x^2}{2S}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}} dxdydt =$$

$$= \left\|\frac{\partial}{\partial x}\{P_n(x,y) - f(x,y)\}\right\|^2_{L_2,S,T-S} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi S(T-S)}} \cdot \int_0^T dt =$$

$$= \frac{T}{\sqrt{2\pi S(T-S)}} \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial x}\{P_n(x,y) - f(x,y)\}\right\|^2_{L_2,S,T-S} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ მეორე შესაკრების კრებადობასაც, რითაც თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია. □

ზოგჯერ ჩვენ საქმე გვაქვს ფუნქციებთან, რომელთაც არ გააჩნიათ კლასიკური აზრით წარმოებული, მაგრამ მათ გააჩნიათ განზოგადებული წარმოებული. მაგალითად: $(w_T, w_S)^+$, $\max(w_T, w_S)$, და მრავალი სხვა. თუ ფუნქციას გააჩნია განზოგადებული კერძო წარმოებული მისთვის იგება გლუვი $f_\varepsilon(x,y)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $f_\varepsilon \xrightarrow{L_{2,S/\alpha,(T-S)/\alpha}} f$, როცა $\varepsilon \to 0$. ასეთი ფუნქციის როლში შეიძლება ავიღოთ მაგალითად შემდეგი ფუნქცია:

$$f_\varepsilon(x,y) = \varepsilon^{-2}\kappa \iint_{R^2} \rho\left(\frac{(x,y)-(u,v)}{\varepsilon}\right) f(u,v)dudv ,$$

სადაც ρ გამაგლუვებელ ფუნქციას აქვს სახე:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \chi \cdot \exp\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2-1}\right), & \|(x,y)\| < 1; \\ 0 \qquad , & \|(x,y)\| \ge 1. \end{cases}$$

ამასთანავე, $\kappa = (\iint_{R^2} \rho dxdy)^{-1}$.

f_ε ფუნქციას გააჩნია კერძო წარმოებულები. ჩვენ შეგვიძლია ამ კერძო წარმოებულების ზღვარს (თუ ისინი არსებობს), როცა $\varepsilon \to 0$ დავარქვათ f-ის განზოგადებული კერძო წარმოებულები.

შენიშვნა: ისევე როგორც ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, თუ f ფუნქცია და მისი განზოგადებული კერძო წარმოებულები არის $L_{2,S/\alpha,T/\alpha}$ სივრციდან, როდესაც $0<\alpha<\frac{1}{2}$-სათვის (იხ. თეორემა 1.6 და მისი შემდგომი შენიშვნა), მაშინ f_ε ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 5.2-ის პირობებს და შესაბამისად ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$f_\varepsilon(w_T,w_S)=E[f_\varepsilon(w_T,w_S)]+$$

$$+\int_0^{T\vee S}\left\{E\left[\frac{\partial}{\partial w_T}f_\varepsilon(w_T,w_S)\Big|\Im_t^w\right]\cdot I_{\{t\le T\}}+E\left[\frac{\partial}{\partial w_S}f_\varepsilon(w_T,w_S)\Big|\Im_t^w\right]\cdot I_{\{t\le S\}}\right\}dwt \quad (5.2).$$

თეორემა 5.3. ვთქვათ $f(x,y)\in L_{2,S,T}$ ისეთი ფუნქციაა, რომელსაც გააჩნია განზოგადებული კერძო წარმოებულები $L_{2,S,(T-S)}$ სივრციდან. მაშინ (P-თ.ყ.)

$$\int_{(0,T]}E\left[\frac{\partial}{\partial w_T}f(w_T,w_S)\Big|\Im_t^w\right]dw_t$$

და

$$\int_{(0,S]}E\left[\frac{\partial}{\partial w_S}f(w_T,w_S)\Big|\Im_t^w\right]dw_t$$

ინტეგრალები არსებობს. (აქ $\frac{\partial}{\partial w_T}f(w_T,w_S)$ და $\frac{\partial}{\partial w_S}f(w_T,w_S)$ არის შესაბამისად $f(x,y)$ ფუნქციის x-ითა და y-ით განზოგადებულ კერძო წარმოებულებში ჩასმული $(x,y)=(w_T,w_S)$.

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ:

$$E\int_{(0,T]}E\left[\frac{\partial}{\partial w_T}f(w_T,w_S)\Big|\Im_t^w\right]^2dt<\infty$$

და

$$E\int_{(0,S]}E\left[\frac{\partial}{\partial w_S}f(w_T,w_S)\Big|\Im_t^w\right]^2dt<\infty\,.$$

მართლაც, იენსენის უტოლობისა და ფუბინის თეორემის გამოყენებით მარტივად შეგვიძლია მივიღოთ:

$$E\int_{(0,T]}E\left[\frac{\partial}{\partial w_T}f(w_T,w_S)\Big|\Im_t^w\right]^2dt\le\int_{(0,T]}EE\left[\frac{\partial}{\partial w_T}f(w_T,w_S)\Big|\Im_t^w\right]^2dt\le$$

$$\le\int_{(0,T]}E[\frac{\partial}{\partial w_T}f(w_T,w_S)]^2dt=\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right\|^2_{2,S,T-S}\cdot\int_{(0,T]}dt=T\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right\|^2_{2,S,T-S}<\infty.$$

ანალოგიურად მტკიცდება მეორე ინტეგრალის არსებობა. □

თეორემა 5.4. ვთქვათ $f\in L_{2,S/\alpha,T/\alpha}$ $(0<\alpha<1/2)$ არის ისეთი ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული კერძო წარმოებულები $L_{2,S/\alpha,(T-S)/\alpha}$ სივრციდან, მაშინ (P-თ.ყ.) ადგილი აქვს მარტინგალური წარმოდგენის თეორემას:

$$f(w_T, w_S) = E[f(w_T, w_S)] +$$
$$+ \int_0^{T \vee S} \left\{ E\left[\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S) \Big| \Im_t^w \right] \cdot I_{\{t \le T\}} + E\left[\frac{\partial}{\partial w_S} f(w_T, w_S) \Big| \Im_t^w \right] \cdot I_{\{t \le S\}} \right\} dw_t, \qquad (5.3).$$

სადაც $\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S)$-ითა და $\frac{\partial}{\partial w_S} f(w_T, w_S)$-ით აღნიშნულია f ფუნქციის განზოგადებული კერძო წარმოებულებში ჩასმული w_T და w_S:

$$\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \Big|_{x = w_T, y = w_S},$$
$$\frac{\partial}{\partial w_S} f(w_T, w_S) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \Big|_{x = w_T, y = w_S}.$$

დამტკიცება: თეორემის პირობებში, შენიშვნის თანახმად გლუვი f_ε ფუნქციისათვის ადგილი აქვს (5.2) წარმოდგენას. წარმოდგენის მარცხენა მხარე საშუალო კვადრატული აზრით მიისწრაფვის (5.3) წარმოდგენის მარცხენა მხარისკენ. საიდანაც ვასკვნით რომ მარჯვენა მხარეში მყოფი პირველი შესაკრებიც მიისწრაფის შესაბამისი შესაკრებისკენ.

მარჯვენა მხარეში მყოფი მეორე შესაკრებები დავშალოთ ორ შესაკრებად და ვაჩვენოთ, რომ:

$$\int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T} f_\varepsilon(w_T, w_S) \Big| \Im_t^w] dw_t \xrightarrow{L_2} \int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T} f(w_T, w_S) \Big| \Im_t^w] dw_t, \text{ როცა } n \to \infty.$$

და

$$\int_0^S E[\frac{\partial}{\partial w_S} f_\varepsilon(w_T, w_S) \Big| \Im_t^w] dw_t \xrightarrow{L_2} \int_0^S E[\frac{\partial}{\partial w_S} f(w_T, w_S) \Big| \Im_t^w] dw_t, \text{ როცა } n \to \infty.$$

მართლაც იენსენის უტოლობის, სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და მათემატიკური ლოდინის თვისებების ძალით გვაქვს:

$$E\left(\int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T} \{f_\varepsilon(w_T, w_S) - f(w_T, w_S)\} \Big| \Im_t^w] dw_t \right)^2 \le$$
$$\le E \int_0^T (E[\frac{\partial}{\partial w_T} \{f_\varepsilon(w_T, w_S) - f(w_T, w_S)\} \Big| \Im_t^w])^2 dt \le$$
$$\le E \int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T} \{f_\varepsilon(w_T, w_S) - f(w_T, w_S)\} \Big| \Im_t^w]^2 dt \le$$
$$\le \int_0^T E[\frac{\partial}{\partial w_T} \{f_\varepsilon(w_T, w_S) - f(w_T, w_S)\}]^2 dt =$$
$$= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi S(T-S)}} \iint_{R^2} E[\frac{\partial}{\partial x} \{f_\varepsilon(x, y) - f(x, y)\}]^2 e^{-\frac{x^2}{2S}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(T-S)}} dx dy dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi S(T-S)}} \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial X} \{f_\varepsilon(x, y) - f(x, y)\} \right\|^2_{L_2, S/\alpha, (T-S)/\alpha} \cdot \int_0^T dt =$$

$$= \frac{T}{\sqrt{2\pi S(T-S)}} \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial X} \{ f_\varepsilon(x,y) - f(x,y) \} \right\|^2_{L_2, S/\alpha, (T-S)/\alpha} \xrightarrow{n \to \infty} 0 .$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ მეორე შესაკრების კრებადობასაც, რითაც თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია. □

მაგალითი 5.1. განვიხილოთ $(w_T - w_S)^+$ შემთხვევითი სიდიდე. გავთვალისწინოთ, რომ

$$\frac{\partial}{\partial w_T}(w_T - w_S)^+ = \begin{cases} 1 & w_T - w_S > 0 \\ 0 & w_T - w_S \le 0 \end{cases} = I_{\{w_T - w_S > 0\}} ,$$

და

$$\frac{\partial}{\partial w_S}(w_T - w_S)^+ = \begin{cases} -1 & w_T - w_S > 0 \\ 0 & w_T - w_S \le 0 \end{cases} = -I_{\{w_T - w_S > 0\}} ,$$

მაშინ თუ ჩვენ გამოვითვლით 5.3 წარმოდგენაში მონაწილე წევრებს დავინახავთ, რომ სამართლინია წარმოდგენა:

$$(w_T - w_S)^+ = \sqrt{\frac{T-S}{2\pi}} + \int_S^T \Phi_{0,T-S}(w_T - w_S) dw_S .$$

გარდა ამისა, ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენებს:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.2.

$$|w_T - w_S| = 2\sqrt{\frac{T-S}{2\pi}} + \int_S^T (2\Phi_{0,T-S}(w_T - w_S) - 1) dw_S .$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5.3.

$$\max(w_T, w_S) = \sqrt{\frac{T-S}{2\pi}} + \int_S^T \Phi_{0,T-S}(w_T - w_S) dw_S + \int_0^S dw_t .$$

$L_{2,S}^T$ სივრცის ანალოგიურად შესაძლებელია შემოვიღოთ $L_{2,T_1,T_2,...,T_n}$ სივრცე და ამ სივრცის ელემენტებისათვის შევამოწმოთ მარტინგალური წარმოდგენის თეორემების სამართლიანობა.

აღვნიშნოთ $\rho(x_1, x_2, ..., x_n, T_1, T_2, ..., T_n) := e^{-\frac{x_1^2}{2T_1} - \frac{x_2^2}{2T_2} - ... - \frac{x_n^n}{2T_n}}$ და შემოვიღოთ წონა $r(x_1, x_2, ..., x_n, T_1, T_2, ..., T_n) := \rho(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_n - x_{n-1}, T_1, T_2 - T_1, T_2 - T_3, ..., T_n - T_{n-1})$. განვმარტოთ კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე $L_{2,T_1,T_2,...,T_n} := L_2[R^n; r(x_1, x_2, ..., x_n, T_1, T_2, ..., T_n)]$ ნებისმიერი ფიქსირებული $T_1, T_2, ..., T_n$ დადებითი რიცხვებისათვის, $T_1 \le T_2 \le ... \le T_n$, როგორც ზომად ფუნქციათა სივრცე, მასზე განსაზღვრული შემდეგი სასრული ნორმით:

$$\|g\|_{2,T_1,T_2,...,T_n} = \|g \cdot r(x_1, x_2, ..., x_n, T_1, T_2, ..., T_n)\|_2 .$$

ზემოთ დამტკიცებული დებულებების ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ადგილი აქვს შემდეგ დებულებებს:

თეორემა 5.5. $L_{2,T_1,T_2,...,T_n} := L_2[R^n; r(x_1,x_2,...,x_n,T_1,T_2,...,T_n)]$ სივრცე არის ბანახის სივრცე $\{x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}...x_n^{m_n} r(x_1,x_2,...,x_n,T_1,T_2,...,T_n)\}$ ბაზისით.

თეორემა 5.6 ვთქვათ, $f \in L_{2,T_1,T_2,...,T_n}$ ისეთი ფუნქციაა, რომელსაც გააჩნია განზოგადებული კერძო წარმოებულები $L_{2,T_1,T_2,...,T_n}$ სივრციდან, მაშინ (P-თ.ყ.)

$$\int_0^{T_1\vee T_2\vee...\vee T_n} \left\{ E\left[f_{X_1}{}'(w_{T_1},w_{T_2},...,w_{T_n}) \middle| \Im_l^w \right] \cdot I_{\{l\le T_1\}} + \cdots + E\left[f_{X_n}{}'(w_{T_1},w_{T_2},...,w_{T_n}) \middle| \Im_t^w \right] \cdot I_{\{t\le T_n\}} \right\} dw_t$$

ინტეგრალი არსებობს.

თეორემა 5.7. ვთქვათ $f \in L_{2,T_1/\alpha,T_2/\alpha,...,T_n/\alpha}$ $(0<\alpha<\dfrac{1}{2})$ ისეთი ფუნქციაა, რომელსაც გააჩნია განზოგადებული კერძო წარმოებულები $f_{X_i}{}'(X_1,...,X_n)$ $(i=1,...,n)$ $L_{2,T_1/\alpha,T_2/\alpha,...,T_n/\alpha}$ სივრციდან, მაშინ $f(w_{T_1},w_{T_2},...,w_{T_n})$ ტიპის ფუნქციონალისთვის (P-თ.ყ.) სამართლიანია წარმოდგენა:

$$f(w_{T_1},w_{T_2},...,w_{T_n}) = E[f(w_{T_1},w_{T_2},...,w_{T_n})] +$$
$$+\int_0^{T_1\vee T_2\vee...\vee T_n} \left\{ E\left[f_{X_1}{}'(w_{T_1},w_{T_2},...,w_{T_n}) \middle| \Im_t^w \right] \cdot I_{\{t\le T_1\}} + E\left[f_{X_2}{}'(w_{T_1},w_{T_2},...,w_{T_n}) \middle| \Im_t^w \right] \cdot I_{\{t\le T_2\}} + \right.$$
$$\left. + \cdots + E\left[f_{X_n}{}'(w_{T_1},w_{T_2},...,w_{T_n}) \middle| \Im_t^w \right] \cdot I_{\{t\le T_n\}} \right\} dw_t .$$

§ 6
შერეული ტიპის ვინერის ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

განვიხილოთ $\xi = F(T, w_T)$ ტიპის შემთხვევითი სიდიდეები და შევეცადოთ მათთვის ჩავწეროთ მარტინგალური წარმოდგენის თეორემა და ვიპოვოთ ცხადი სახით სტოქასტური ინტეგრალის ინტეგრანდი. განვიხილოთ რამოდენიმე შემთხვევა:

1. $F(T, w_T) = T^m w_T^n$
2. $F(T, w_T) = g(T) f(w_T)$ სადაც $|g(x)| < \infty$ და f-ს გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული.
3. $F(T, w_T) \in L_2^T \otimes L_{2,T}$

დავიწყოთ პირველი შემთხვევით.

თეორემა 6.1. ვთქვათ, $F(T, w_T) = T^m w_T^n$, მაშინ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$F(T, w_T) = E[F(T, w_T)] + \int_0^T E[F(T, w_T)_x{}' \,|\, \Im_t^w] dw_t \qquad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (6.1)$$

დამტკიცება: ჩვენ უკვე მიღებული გვაქვს w_T^n-ის მარტინგალური წარმოდგენა. 2.1 თეორემის თანახმად (P-თ.ყ.) გვაქვს:

$$w_T^n = E[w_T^n] + \int_0^T E[(w_T^n)'_x \,|\, \Im_S^w] dw_S .$$

გავამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე T^m-ზე და გამოვიყენოთ მათემატიკური ლოდინის, სტოქასტური ინტეგრალის პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და გაწარმოების ოპერატორების წრფივობის თვისებები. ცხადია, რომ:

$$T^m w_T^n = E[T^m w_T^n] + \int_0^T E[T^m (w_T^n)'_x \,|\, \Im_S^w] dw_S \qquad \text{(P-თ.ყ.)}.$$

თეორემა 6.2. ვთქვათ $F(T, w_T) = g(T) f(w_T)$, სადაც $|g(x)| < \infty$ და f-ს გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული $L_{2,T/\alpha}$-დან, მაშინ (P-თ.ყ.) არსებობს ინტეგრალი:

$$\int_0^T E[F(T, w_T)_x{}' \,|\, \Im_t^w] dw_t$$

(სადაც $F(T, w_T)_x{}'$-ით აღნიშნულია $F(T, x)$ ფუნქციის x-ით წარმოებულში ჩასმული $x = w_T$).

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$E\int_0^T E[F(T,w_T)_x{}'\,|\,\Im_t^w]^2\,dt<\infty$$

მართლაც, იენსენის უტოლობებისა და ფუბინის თეორემის გამოყენებით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$E\int_0^T E[F(T,w_T)_x{}'\,|\,\Im_t^w]^2\,dt\le E\int_0^T E\{F(T,w_T)_x{}']^2\,|\,\Im_t^w\}dt=$$

$$=\int_0^T EE\{[F(T,w_T)_x{}']^2\,|\,\Im_t^w\}dt=\int_0^T E[F(T,w_T)_x{}']^2\,dt=$$

$$=\|F(T,x)_x{}'\|_{2,T}^2\cdot\int_0^T dt=T\cdot\|F(T,x)_x{}'\|_{2,T}^2<\infty.\quad\square$$

თეორემა 6.3. ვთქვათ $F(T,w_T)=g(T)f(w_T)$, სადაც $|g(x)|<\infty$ და $f\in L_{2,T/\alpha}$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული $L_{2,T/\alpha}$-დან, მაშინ (P-თ.ყ.) სამართლიანია ტოლობა:

$$F(T,w_T)=E[F(T,w_T)]+\int_0^T E[F(T,w_T)_x{}'\,|\,\Im_t^w]dw_t\ ,$$

სადაც $F(T,w_T)_x{}'$-ით აღნიშნულია $F(T,x)$ ფუნქციის x-ით წარმოებულში ჩასმული $x=w_T$.

დამტკიცება: ჯერ დავამტკიცოთ თეორემა იმ შემთხვევისთვის, როდესაც f წარმოებადია ჩვეულებრივი აზრით და $f'\in L_{2,T}$. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში მოიძებნება პოლინომთ ისეთი მიმდევრობა $Q_n(x)$, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\|Q_n(x)-f'(x)\|_{L_{2,T}}=0.$$

შემოვიღოთ პოლინომთა ახალი მიმდევრობა:

$$P_n(x):=f(0)+\int_0^x Q_n(x)dy\,,$$

მაშინ გასაგებია, რომ:

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(x)-f(x)\|_{L_{2,T}}=0.$$

ცხადია აგრეთვე, რომ ნებსმიერი T-თვის:

$$\lim_{n\to\infty}\|g(T)Q_n(x)-g(T)f'(x)\|_{L_{2,T/\alpha}}=0$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\|g(T)P_n(x)-g(T)f(x)\|_{L_{2,T/\alpha}}=0.$$

2.2 თეორემის საფუძველზე (თუ (2.2) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $g(T)$-ზე) მათემატიკური ლოდინის, სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და გაწარმოების ოპერატორების წრფივობის თვისებების გამოყენებით მივიღებთ, რომ:

$$g(T)P_n(w_T)=E[g(T)P_n(w_T)]+\int_{(0,T]}E\{g(T)[P_n(w_T)]_x{}'\,|\,\Im_t^w\}dw_t\qquad\text{(P-თ.ყ.).}$$

დავამტკიცოთ, რომ უკანასკნელი წარმოდგენის მარცხენა მხარე მიისწრაფის (6.1) წარმოდგენის მარცხენა მხარისკენ. კრებადობა ვაჩვენოთ L_2-ში. მართლაც გვაქვს:

$$E[g(T)f(w_T)-g(T)P_n(w_T)]^2=\frac{g^2(T)}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-P_n(x)]^2e^{-\frac{x^2}{2T}}dx=$$

$$=\frac{g^2(T)}{\sqrt{2\pi T}}\|f(x)-P_n(x)\|^2_{L_{2,T}}\xrightarrow{n\to\infty}0\,.$$

აღნიშნულიდან გამომდინარეობს წარმოდგენის მარჯვენა მხარეში მყოფი პირველი წევრის კრებადობაც შესაბამისი წევრისკენ. ვაჩვენოთ მეორე შესაკრებში მყოფი წევრების კრებადობა. იენსენის უტოლობის, სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$E[\int_0^T E\{g(T)f'(w_T)-g(T)Q_n(w_T)\big|\Im_t^w\}dw_t]^2=$$

$$=g^2(T)E[\int_0^T E\{f'(w_T)-Q_n(w_T)\big|\Im_t^w\}^2dt]\le$$

$$\le g^2(T)E[\int_0^T E\{[f'(w_T)-Q_n(w_T)]^2\big|\Im_t^w\}dt]=$$

$$=g^2(T)\int_0^T E\{f'(w_T)-Q_n(w_T)\}^2dt=$$

$$=g^2(T)\|f'(x)-Q_n(x)\|^2_{L_{2,T}}\int_0^T dt=$$

$$=T\cdot g^2(T)\cdot\|f'(x)-Q_n(x)\|^2_{L_{2,T}}\xrightarrow{n\to\infty}0\,.$$

ყოველივე ზემოთ მიღებულის გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ თეორემა სამართლიანია, თუ f წარმოებადია კლასიკური აზრით.

ვთქვათ, ახლა f ფუნქცია, $f\in L_{2,T/\alpha}$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული ამავე სივრციდან. მაშინ განმარტებულია მისი სობოლევის საშუალო (იხ §1). შემოვიღოთ ეს ფუნქცია:

$$f_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}\kappa\int_{-\infty}^{\infty}\zeta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)f(y)dy\,.$$

როგორც აღნიშნული იყო, ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\|f_\varepsilon(x)-f(x)\|_{2,T/\alpha}\xrightarrow{\varepsilon\to0}0\,,$$

$$\|f_\varepsilon'(x)-f'(x)\|_{2,T/\alpha}\xrightarrow{\varepsilon\to0}0\,.$$

ცხადია აგრეთვე, რომ ნებისმიერი T-თვის ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$\|g(T)f_\varepsilon(x)-g(T)f(x)\|_{L_{2,T}}\xrightarrow{\varepsilon\to0}0\,,$$

$$\|g(T)f_\varepsilon'(x)-g(T)f'(x)\|_{L_{2,T}}\xrightarrow{\varepsilon\to0}0\,.$$

ვინაიდან $f_\varepsilon(x)$ გლუვი ფუნქციაა, ამიტომ უკვე დამტკიცებულის თანახმად იგი აკმაყოფილებს (6.1) წარმოდგენას:

$$g(T)f_\varepsilon(w_T)=E[g(T)f_\varepsilon(w_T)]+\int_0^T E[g(T)f_\varepsilon(w_S)_x'\big|\Im_t^w]dw_t\,. \qquad \text{(P-თ.ჯ.)} \qquad (6.2)$$

დავამტკიცოთ უკანასკნელი წარმოდგენის თითოეული წევრის კრებადობა (6.1) წარმოდგენის შესაბამისი წევრისკენ საშუალო კვადრატული აზრით. გვაქვს:

$$E[g(T)f(w_T)-g(T)f_\varepsilon(w_T)]^2=\frac{g^2(T)}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-f_\varepsilon(x)]^2e^{-\frac{x^2}{2T}}dx\le$$

$$\le\frac{g^2(T)}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-f_\varepsilon(x)]^2e^{-\frac{x^2}{2T/\alpha}}dx=\frac{g^2(T)}{\sqrt{2\pi T}}\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|^2_{L_{2,T/\alpha}}\xrightarrow{\varepsilon\to\infty}0\,.$$

მიღებულიდან გამომდინარეობს წარმოდგენის მარჯვენა მხარეში მყოფი პირველი წევრის კრებადობაც შესაბამისი წევრისკენ. ვაჩვენოთ მეორე შესაკრებში მყოფი წევრების კრებადობა. იენსენის უტოლობის, სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$E[\int_0^T E\{g(T)f'(w_T)-g(T)f_\varepsilon'(w_T)\big|\Im_t^w\}dw_t]^2=$$

$$=g^2(T)E[\int_0^T E\{f'(w_T)-f_\varepsilon'(w_T)\big|\Im_t^w\}^2dt]\le$$

$$\le g^2(T)E[\int_0^T E\{[f'(w_T)-f_\varepsilon'(w_T)]^2\big|\Im_t^w\}dt]=g^2(T)\int_0^T E\{f'(w_T)-f_\varepsilon'(w_T)\}^2dt=$$

$$=\|f'(x)-f_\varepsilon'(x)\|^2_{L_{2,T}}\frac{g^2(T)}{\sqrt{2\pi T}}\int_0^T dt\le T\|f'(x)-f_\varepsilon'(x)\|^2_{L_{2,T/\alpha}}\frac{g^2(T)}{\sqrt{2\pi T}}\xrightarrow{\varepsilon\to\infty}0\,.$$

ამით დამტკიცება დასრულებულია. □

შემოვიღოთ ნორმა:

$$\|F(T,x)\|_{L_2\otimes L_{2,T}}=\int_{-\infty}^{\infty}F(T,x)^2\frac{e^{-\frac{x^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}dx\,. \qquad (6.3)$$

<u>განმარტება</u>: ავღნიშნოთ $L_2\otimes L_{2,T}$ სიმბოლოთი ბანახის სივრცე, რომელიც მიიღება $g(T)f(x)$ ტიპის ორი ცვლადის ფუნქციების (სადაც $g\in L_2(-\infty,\infty)$ და $f\in L_{2,T}$) წრფივი კომბინაციების გასრულებით (6.3) ნორმის მიმართ.

თეორემა 6.4. თუ $F(T,x)\in L_{2,}\otimes L_{2,T/\alpha}$ ფუნქციას გააჩნია პირველი რიგის წარმოებული $F(T,x)'_x\in L_{2,}\otimes L_{2,T/\alpha}$, მაშინ ქვემოთმოყვანილი სტოქასტური ინტეგრალი არსებობს და ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$F(T,w_T)=E[F(T,w_T)]+\int_{(0,T]}E[F(T,w_T)_x'\big|\Im_t^w]dw_t \qquad \text{(P-თ.ჯ.)}$$

დამტკიცება: სტოქასტური ინტეგრალის არსებობა მტკიცდება 3.1 თეორემასა და 5.1 თეორემაში მოყვანილი მსჯელობების ანალოგიურად.

რადგან $F(T,x)'_x\in L_2\otimes L_{2,T/\alpha}$, მაშინ მოიძებნება

$$G_n(T,x)=\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(T) f_k(x)$$

ისეთი, რომ

$$\|G_n(T,x)-F(T,x)\|_{L_2\otimes L_{2,T/\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$F_n(T,x):=F(T,0)+\int_0^x G_n(T,y)dy .$$

მაშინ ვინაიდან

$$F(T,x)=F(T,0)+\int_0^x [F(T,y)]'_y\, dy ,$$

ამიტომ ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ:

$$\|F_n(T,x)-F(T,x)\|^2_{L_2\otimes L_{2,T}} = \left\|\int_0^x \{G_n(T,y)-[F(T,y)]'_y\}dy\right\|^2_{L_2\otimes L_{2,T}} =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^x G_n(T,y)-[F(T,y)]'_y\, dy\right)^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}dx \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\left\{\int_0^{|x|}\left(G_n(T,y)-[F(T,y)]'_y\right)^2 dy\right\}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\left\{\int_0^{|x|}\left(G_n(T,y)-[F(T,y)]'_y\right)^2 e^{-\frac{y^2}{2T/\alpha}}e^{\frac{y^2}{2T/\alpha}}dy\right\}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx \le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\left\{\int_0^{|x|}\left(G_n(T,y)-[F(T,y)]'_y\right)^2 e^{-\frac{y^2}{2T/\alpha}}e^{\frac{x^2}{2T/\alpha}}dy\right\}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|\left\{\int_0^{|x|}\left(G_n(T,y)-[F(T,y)]'_y\right)^2 e^{-\frac{y^2}{2T/\alpha}}dy\right\}e^{-\frac{(1-\alpha)x^2}{2T}}dx =$$

$$=\left\|\left(G_n(T,y)-[F(T,y)]'_y\right)\right\|^2_{L_2\otimes L_{2,T/\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-\frac{(1-\alpha)x^2}{2T}}dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

მეორეს მხრივ, ვინაიდან განცალებადი ფუნქციებისათვის ჩვენ უკვე მიღებული გვაქვს (6.1) ტიპის სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა, ამიტომ მათემატიკური ლოდინის, სტოქასტური ინტეგრალისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის წრფივობის გამო, ასეთი $F_n(T,x)$ ფუნქციებისთვის ჩვენ გვექნება შემდეგი წარმოდგენა.

$$F_n(T,w_T)=E[F_n(T,w_T)]+\int_{(0,T]}E[F_n(T,w_T)_x{}'\,|\,\Im_t^w]dw_t . \qquad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (6.4)$$

დავამტკიცოთ (6.4) წარმოდგენის მარცხენა მხარის კრებადობა (6.1) წარმოდგენის მარცხენა მხარისკენ საშუალო კვადრატული აზრით. გვაქვს:

$$E[F_n(T,w_T)-F(T,w_T)]^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{+\infty}[F_n(T,x)-F(T,x)]^2 e^{-\frac{x^2}{2T}}dx =$$

$$=\|F_n(T,x)-F(T,x)\|^2_{L_2\otimes L_{2,T}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

მიღებული თანაფარდობიდან გამომდინარეობს წარმოდგენის მარჯვენა მხარეში მყოფი პირველი წევრის კრებადობაც შესაბამისი წევრისკენ. ვაჩვენოთ მეორე შესაკრებში მყოფი წევრების კრებადობა. იენსენის უტოლობის, სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებებისა და ფუბინის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ, ვღებულობთ, რომ:

$$E[\int_0^T E\{F_n(T,w_T)'_x - F(T,w_T)'_x \left|\Im_t^w\right\}dw_t]^2 = E[\int_0^T E\{F_n(T,w_T)'_x - F(T,w_T)'_x \left|\Im_t^w\right\}^2 dt] \leq$$

$$\leq E[\int_0^T E\{[F_n(T,w_T)'_x - F(T,w_T)'_x]^2 \left|\Im_t^w\right\}dt] = \int_0^T E\{F_n(T,w_T)'_x - F(T,w_T)'_x\}^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(T,x)'_x - F(T,x)'_x]^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}} dx \right\} dt = \left\| F_n(T,w_T)'_x - F(T,w_T)'_x \right\|^2_{L_2 \otimes L_{2,T}} \int_0^T dt \leq$$

$$\leq T \cdot \left\| F_n(T,x)'_x - F(T,x)'_x \right\|^2_{L_{2,T} \otimes L_{2,T/\alpha}} \xrightarrow{n \to \infty} 0 .$$

ყოველივე ზემოთთქმულიდან გამომდინარე ჩვენ ვრწმუნდებით თეორემის სამართლიანობაში. □

3.3, 5.4-სა და 6.3 თეორემებში მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად ჩვენ შეგვიძლია დავრწმუნდეთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობაში:

თეორემა 6.5. თუ $F(T,x) \in L_2 \otimes L_{2,T/\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ ფუნქციას ყოველი ფიქსირებული T-სათვის გააჩნია პირველი რიგის განზოგადებული წარმოებული x-ის მიმართ $\partial_x F(T,x)$, ისეთი, რომ $\partial_x F(T,x) \in L_2 \otimes L_{2,T/\alpha}$, მაშინ ქვემოთმოყვანილი სტოქასტური ინტეგრალი განმარტებულია და ადგილი აქვს სტოქასტურ ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$F(T,w_T) = E[F(T,w_T)] + \int_{(0,T]} E[\partial_x F(T,w_T) \left|\Im_t^w\right.]dw_t . \qquad \text{(P-თ.ყ.)}$$

შენიშვნა: ანალოგიური თეორემა სამართლიანი იქნება, როცა $F(T,x)$ არის მრავალი ცვლადის ფუნქცია x-ის მიმართ (შესაბამისად განმარტებული $L_2 \otimes L_{2,T/\alpha}$ სივრცის ანალოგისთვის).

საინტერესოა რა ტიპის ფუნქციებია ჩვენს მიერ შემოღებულ კლასში. აღსანიშნავია, რომ $L_2 \otimes L_{2,T}$ საკმაოდ ფართო კლასია. სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 6.6. თუ $F(T,x)$ ფუნქცია უწყვეტია T-თი ფიქსირებული x-სათვის და $F(T,x) \in L_{2,T}$ ფიქსირებული T-სათვის, მაშინ $F(T,x) \in L_2 \otimes L_{2,T}$.

დამტკიცება: ავაგოთ ფუნქცია:

$$F_n(T,x) = \sum_{k=o}^{n-1} F(T_k^n, x) I_{(T_k, T_{k+1}]}(T) + F(0,x) I_{\{0\}}(T)$$

სადაც $[0,T]$ ინტერვალის $\Pi_n = \{0 = T_0^n < T_1^n < \ldots < T_n^n = T\}$ დაყოფათა მიმდევრობა ისეთია, რომ $\max_{0 \leq k \leq n-1} \left| T_{k+1}^n - T_k^n \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $F(T,x)$ შემოსაზღვრულია $\left|F(T,x)\right| \le c < \infty$. (წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავალთ $F^{(N)}(T,x) = F(T,x)\chi^{N}(T,x)$, სადაც

$$\chi^{N}(T,x) = \begin{cases} 1, & \left|F(T,x)\right| \le N; \\ 0, & \left|F(T,x)\right| > N. \end{cases}$$

და მაშინ $F^{(N)}(T,) \xrightarrow{L_2} F(T,X)$).

Π_n დანაწილების როლში შესაძლებელია ავიღოთ ისეთი დანაწილება, რომ

$$F_n(T,x) = F\left(\frac{kT}{n}, x\right), \text{ როცა } \frac{kT}{n} \le T \le \frac{(k+1)T}{n}.$$

მაშინ ლებეგის თეორემის შესახებ მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ, გვაქვს: $F_n(T,x) \xrightarrow{L_2} F(T,x)$, როცა $n \to \infty$.

ვინაიდან $F_n(T,x)$ არის განცალებადი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია, ამიტომ $L_2 \otimes L_{2,T}$ სივრცის განმარტების თანახმად, $F(T,x) \in L_2 \otimes L_{2.T}$. □

თ ა ვ ი   მ ე ო რ ე

§ 1
დამხმარე დებულებები

ვთქვათ $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{0\le t\le\infty}, \mathrm{P})$ სტანდარტული ალბათური სივრცეა, ხოლო N_t-მასზე განსაზღვრული სტანდარტული პუასონის პროცესია: $\mathrm{P}(N_t = n) = \frac{t^n}{n!}e^{-t}$, n=0,1,2,. . .

აღვნიშნოთ $\mu_n(t)$ სიმბოლოთი პუასონის პროცესის n-ური რიგის მომენტი $\mu_n(t) := E(N_t)^n$.

ლემა 1.1. N_t პუასონის პროცესის $n-$ური რიგის მომენტისთვის $(n \ge 1)$ სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული წარმოდგენა:

$$\mu_n(t) = t\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \mu_i(t) \tag{1.1}$$

<u>*დამტკიცება:*</u>

$$\mu_n(t) = \sum_{x=0}^{\infty} x^n \frac{t^x}{x!}e^{-t} = \sum_{x=1}^{\infty} x^{n-1}\frac{t^x}{(x-1)!}e^{-t} =$$

$$= t\sum_{x=1}^{\infty}(x-1+1)^{n-1}\frac{t^{x-1}}{(x-1)!}e^{-t} = t\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (x-1)^i \frac{t^{x-1}}{(x-1)!}e^{-t} =$$

$$= t\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \sum_{x=1}^{\infty}(x-1)^i \frac{t^{x-1}}{(x-1)!}e^{-t} = t\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \mu_i(t). \quad \square$$

შედეგი 1.1. N_t პუასონის პროცესის $n-$ური რიგის მომენტი არის $n-$ური რიგის პოლინომი t-ს მიმართ.

<u>*დამტკიცება*</u>: ვინაიდან $E[N_t] = \mu_1(t) = t$, შედეგის სისწორეში ადვილად დავრწმუნდებით მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის საფუძველზე 1.1 ლემის გათვალისწინებით. $\square$

ლემა 1.2 N_t პუასონის პროცესის $n-$ური რიგის მომენტი $(n \ge 1)$ გამოითვლება ფორმულით:

$$\mu_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k ,$$

სადაც მრავალწევრის a_k კოეფიციენტები გამოითვლება რეკურენტული თანაფარდობებით:

$$a_0 = 0,$$

$$a_k = \frac{k^n}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}, \qquad k = 1,2,\dots n. \tag{1.2}$$

დამტკიცება: 1.1 შედეგის თანახმად:

$$\mu_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k .$$

მეორეს მხრივ, მათემატიკური ლოდინის განმარტების საფუძველზე, გვაქვს:

$$\mu_n(t) = E(N_t)^n = \sum_{x=0}^{\infty} x^n \frac{t^x}{x!} e^{-t} = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} x^n \frac{t^x}{x!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}} .$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^n \frac{t^x}{x!} = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} .$$

თუ უკანასკნელ თანაფარდობაში ვისარგებლებთ მწკრივების გამრავლების წესით და მიღებული ტოლობის ორივე მხარეში $t-$ს ტოლი ხარისხის მქონე კოეფიციენტებს ერთმანეთს გავუტოლებთ, ადვილად დავინახავთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$a_0 = 0 ;$$

$$a_0 + a_1 = 1 ;$$

$$\frac{a_0}{2!} + a_1 + a_2 = \frac{2^n}{2!} ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_k}{0!} + \frac{a_{k-1}}{1!} + \ldots + \frac{a_1}{(k-1)!} + \frac{a_0}{k!} = \frac{k^n}{k!} ,\quad k = 1, 2, \ldots, n .$$

ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად ვღებულობთ, რომ:

$$a_0 = 0 ;$$

$$a_1 = 1 ;$$

$$a_2 = \frac{2^n}{n!} - a_1 ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_k = \frac{k^n}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-1)!} ,\quad k = 1, 2, \ldots, n. \quad \square$$

აღვნიშნოთ M_t სიმბოლოთი კომპენსირებული პუასონის პროცესი, $M_t := N_t - t$. კომპენსირებული პუასონის პროცესი $n-$ური რიგის მომენტი აღვნიშნოთ $\nu_n(t)$ სიმბოლოთი, $\nu_n(t) := E(M_t)^n$.

ლემა 1.3. კომპენსირებული პუასონის პროცესის $n-$ური რიგის მომენტი აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ განტოლობებს:

$$\nu_n(t) = t \sum_{i=1}^{n-2} C_{n-1}^{i} \nu_i(t) \qquad n \ge 2 ; \qquad (1.3)$$

$$\nu_0(t) = 1 ;$$

$$\nu_1(t) = 0 .$$

დამტკიცება: მათემატიკური ლოდინის განმარტებისა და ნოუტონის ბინომის ფორმულის საფუძველზე ადვილი დასანახია, რომ სამართლიანია შემდეგი გადასვლები:

$$\nu_n(t) = E(M_t)^n = E(N_t - t)^n = \sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^n \frac{t^k}{k!}e^{-t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^{n-1}(k-t)\frac{t^k}{k!}e^{-t} = \sum_{k=1}^{\infty}(k-t)^{n-1}\frac{t^k}{k!}e^{-t} - t\sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^{n-1}\frac{t^k}{k!}e^{-t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(k-1-t+1)^{n-1}\frac{t^k}{(k-1)!}e^{-t} - t\nu_{n-1}(t) =$$

$$= t\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i(k-1-t)^i\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-t} - t\nu_{n-1}(t) =$$

$$= t\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i\sum_{m=0}^{\infty}(m-t)^i\frac{t^m}{m!}e^{-t} - t\nu_{n-1}(t) =$$

$$= t\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-i}^i\nu_i(t) - t\nu_{n-1}(t) = t\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-1}^i\nu_i(t);$$

$$\nu_0(t) = E(M_t)^0 = E(1) = 1;$$

$$\nu_1(t) = E(M_t) = E(N_t - t) = t - t = 0. \quad \square$$

აღვნიშნოთ x ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი $[x]$ სიმბოლოთი.

ლემა 1.4. კომპენსირებული პუასონის პროცესის $n-$ური რიგის მომენტი $(n \geq 1)$ წარმოადგენს $[n/2]$ რიგის პოლინომს $t-$ს მიმართ:

$$\nu_n(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^n t^k, \tag{1.4}$$

სადაც კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურენტულ თანაფარდობებს:

$$a_k^n = \sum_{i+j=k}(-1)^i C_n^i \frac{j^{n-i}}{j!} - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i^n}{(k-i)!}, \quad 2 \leq k \leq [n/2];$$

$$a_0 = 1; \tag{1.5}$$

$$a_1 = 0.$$

დამტკიცება: ვინაიდან $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \nu_3 = t$, ამიტომ დებულება სამართლიანია $n = 1, 2$ და 3-ის შემთხვევაში. დავუშვათ, რომ იგი სამართლიანია $n = m$-სათვის და შევამოწმოთ, რომ სამართლიანი იქნება $n = (m+1)$-ის შემთხვევაში. გვაქვს:

$$\nu_m(t) = \sum_{k=0}^{[m/2]} a_k^m t^k.$$

ამიტომ 1.3 ლემის თანახმად, თუ ვისარგებლებთ თანაფარდობით

$$[(m+1)/2] = [(m-1)/2] + 1,$$

მივიღებთ, რომ:

$$\nu_{m+1}(t) = t\sum_{i=0}^{m-1}C_m^i\sum_{k=0}^{[i/2]}a_k^i t^k = t\sum_{i=0}^{[(m-1)/2]}b_i t^i = \sum_{k=0}^{[(m+1)/2]}b_{k-1}t^k.$$

შესაბამისად, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის საფუძველზე (1.4) თანაფარდობა სამართლიანია ნებისმიერი n-სათვის.

მეორეს მხრივ, მათემატიკური ლოდინის განმარტების თანახმად, გვაქვს:

$$\nu_n(t) = E(N_t - t)^n = \sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^n \frac{t^k}{k!}e^{-t} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^n \frac{t^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^n t^k \ ,$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^n \frac{t^k}{k!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\cdot\sum_{k=0}^{[n/2]} a_k^n t^t \ .$$

თუ ახლა ვისარგებლებთ ნიუტონის ბინომის ფორმულითა და მწკრივების გამრავლების წესით, და გადამრავლების შემდეგ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეში t-ს ტოლი ხარისხის მქონე კოეფიციენტების გატოლების შედეგად ადვილად დავინახავთ, რომ (1.4) წარმოდგენაში მონაწილე a_k^n კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ (1.5) თანაფარდობებს. □

შედეგი 1.2. $a_k^n = \sum_{i+j=k}(-1)^i C_n^i \frac{j^{n-i}}{j!} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i^n}{(k-i)!}$ რეკურენტული განტოლების ამონახსნია $a_k^n = 0$, თუ $[n/2] < k \le n$.

ლემა 1.5. კომპენსირებული პუასონის პროცესის $n-$ური რიგის მომენტი $\nu_n(t)$ $(n \ge 2)$ აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლობას:

$$\frac{d\nu_n(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \nu_k(t) .$$

დამტკიცება: განმარტების თანახმად:

$$\nu_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^n \frac{t^k}{k!}e^{-t} \ .$$

ცხადია, რომ:

$$\frac{d\nu_n(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^n \frac{t^k}{k!}e^{-t}\right] = -\sum_{k=0}^{\infty} n(k-t)^{n-1}\frac{t^k}{k!}e^{-t} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(k-t)^n k\frac{t^{k-1}}{k!}e^{-t} - \sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^n \frac{t^k}{k!}e^{-t} := I_1 + I_2 + I_3 .$$

ადვილი დასანახია, რომ უკანასკნელი თანაფარდობის თითოეული შესაკრები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$I_1 := -n\sum_{k=0}^{\infty}(k-t)^{n-1}\frac{t^k}{k!}e^{-t} = -n\nu_{n-1}(t) ;$$

$$I_2 := \sum_{k=1}^{\infty}(k-t)^n \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-t} = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1-t+1)^n \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} C_n^i (k-1-t)^i \frac{t^k}{(k-1)!}e^{-t} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \sum_{k=1}^{\infty}(k-1-t)^i \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-t} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \nu_i(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} C_n^i \nu_i(t) + n\nu_{n-1}(t) + \nu_n(t);$$

$$I_3 := -\sum_{k=0}^{\infty} (k-t)^n \frac{t^k}{k!} e^{-t} = -\nu_n(t).$$

ყოველივე ზემოთ მიღებულის გაერთიანებით ვასკვნით, რომ ლემის მტკიცებულება სამართლიანია. □

ლემა 1.6. კომპენსირებული პუასონის პროცესისთვის n-ური ხარისხისთვის ($n \ge 2$) სამართლინია შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$M_t^n = n\int_0^t M_{s-}^{n-1} dM_s + \sum_{i=2}^{n} \int_0^t C_n^i M_{s-}^{n-i} dN_s. \qquad \text{(P-თ.ყ.)}.$$

<u>*დამტკიცება:*</u> იტოს ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$M_t^n = n\int_0^t M_{s-}^{n-1} dM_s + \sum_{s\le t} (M_s^n - M_{s-}^n - nM_{s-}^{n-1}\Delta M_s).$$

ნიუტონის ბინომის ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$a^n - b^n - n(a-b)b^{n-1} = \sum_{i=2}^{n} C_n^i (a-b)^i b^{n-i}. \qquad (1.6)$$

შესაბამისად, M_t^n შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით;

$$M_t^n = n\int_0^t M_{s-}^{n-1} dM_s + \sum_{s\le t}\sum_{i=2}^{n} C_n^i \Delta M_s^i M_{s-}^{n-i} =$$

$$= n\int_0^t M_{s-}^{n-1} dM_s + \sum_{s\le t}\sum_{i=2}^{n} C_n^i M_{s-}^{n-i} dN_s =$$

$$= n\int_0^t M_{s-}^{n-1} dM_s + \int_0^t \sum_{i=2}^{n} C_n^i M_{s-}^{n-i} dN_s. \quad \square$$

აღვნიშნოთ $\Im_t^M$ $(t \ge 0)$ სიმბოლოთი M_t კომპენსირებული პუასონის პროცესის P ზომის მიმართ გასრულებული σ-ალგებრათა საკუთარი ნაკადი: $\Im_t^M := \sigma\{M_s : 0 \le s \le t\}$.

ლემა 1.7. $M_t = N_t - t$ პუასონის კომპენსირებული პროცესის n-ური ხარისხის $E[M_t^n | \Im_s^M]$ პირობითი მათემატიკური ლოდინისათვის ($t \le s$) ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$E[M_t^n | \Im_s^M] = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \nu_{n-i}(t-s) M_s^i, \ (t \le s). \qquad \text{(P-თ.ყ.)}.$$

<u>*დამტკიცება:*</u> კომპენსირებული პუასონის პროცესისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების ძალით, ნიუტონის ბინომის ფორმულის საფუძველზე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E[M_t^n | \Im_s^M] = E[(M_t - M_s + M_s)^n | \Im_s^M] =$$

$$= E[\sum_{i=0}^{n} C_n^i M_s^i (M_t - M_s)^{n-i} \left| \Im_s^M \right] = M_s^i E[\sum_{i=0}^{n} C_n^i (M_t - M_s)^{n-i} \left| \Im_s^M \right] =$$

$$= M_s^i \sum_{i=0}^{n} E[C_n^i (M_t - M_s)^{n-i}] = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \nu_{n-i}(t-s) M_s^i . \ \square$$

თეორემა 1.1. დავუშვათ, რომ $f(x,y)$ არის R^2-ზე განსაზღვრული, თითქმის ყველგან ნულისაგან განსხვავებული, არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია, რომელიც გარკვეული $\delta > 0$ რიცხვისთვის და ნებისმიერი $(x,y) \in R^2$-თვის აკმაყოფილებს პირობას $\left| f(x,y) \right| \le Ce^{-\delta(|x|+|y|)}$. მაშინ ფუნქციათა სისტემა $E = \{x^n y^m f(x,y)\} \, (n,m = 0,1,2,...)$ სრულია $L_2(R^2)$-ში.

დამტკიცება: დავუშვათ $E = \{x^n y^m f(x,y)\}$ სისტემა არ არის სრული. მაშინ ხანი–ბანახის თეორემის ძალით მოიძებნება ისეთი არანულოვანი ფუნქცია $h \in L_2(-\infty,+\infty)$, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f(x,y) h(x,y) dxdy = 0, \quad \forall n,m = 0,1,2,... .$$

ვინაიდან $h, f \in L_2(R^2)$, ცხადია, რომ $fh \in L_1(R^2)$. დავუშვათ, რომ g არის fh ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა, ე.ი.

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) h(x,y) e^{-i(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} dxdy .$$

მაშინ ცხადია

$$\frac{\partial^{n+m} g(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1^n \partial \lambda_2^m} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f(x,y) h(x,y) e^{-i(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} dxdy .$$

დავუშვათ, რომ λ_1 და λ_2 არის კომპლექსური, ანუ

$$\lambda_1 = \mathrm{Re}(\lambda_1) + \mathrm{Im}(\lambda_1) \ \text{ და } \ \lambda_2 = \mathrm{Re}(\lambda_2) + \mathrm{Im}(\lambda_2) .$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = x\,\mathrm{Re}(\lambda_1) + ix\,\mathrm{Im}(\lambda_1) + y\,\mathrm{Re}(\lambda_2) + iy\,\mathrm{Im}(\lambda_2) =$$
$$= (x\,\mathrm{Re}(\lambda_1) + y\,\mathrm{Re}(\lambda_2)) + i(x\,\mathrm{Im}(\lambda_1) + y\,\mathrm{Im}(\lambda_2)) .$$

შესაბამისად, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$g(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) h(x,y) e^{-i(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) h(x,y) e^{i(x\mathrm{Re}(\lambda_1) + y\mathrm{Re}(\lambda_2)) - (x\mathrm{Im}(\lambda_1) + y\mathrm{Im}(\lambda_2))} .$$

თუ $\left| \mathrm{Im}\lambda_1 \right| < \delta_0 < \delta$ და $\left| \mathrm{Im}\lambda_2 \right| < \delta_0 < \delta$, მაშინ $g(\lambda_1, \lambda_2)$ ანალიზურია $\{\lambda_1, \ \left| \mathrm{Im}\lambda_1 \right| < \delta_0\} \times \{\lambda_2, \ \left| \mathrm{Im}\lambda_2 \right| < \delta_0\}$ სიმრავლეზე.

განვიხილოთ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ შემთხვევა, მაშინ

$$\frac{\partial^{n+m} g(0,0)}{\partial \lambda_1^n \partial \lambda_2^m} = 0, \quad \forall n,m = 1,2,... .$$

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $f(x,y) \cdot h(x,y) = 0$ თითქმის ყველგან. მეორეს მხრივ, ვინაიდან f თითქმის ყვე-

ლგან ნულისაგან განსხვავებულია, აქედან დავასკვნით, რომ $h(x, y) = 0$ თითქმის ყველგან, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას. შესაბამისად, თეორემის დებულება სამართლიანია. □

დავუშვათ, რომ X' და X'' სიმრავლეებზე განმარტებულია ზომები μ' და μ''. შესაბამისი კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცეები აღვნიშნოთ L_2' და L_2'' სიმბოლოებით. ამ სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლზე

$$X = X' \times X''$$

განვიხილოთ ზომა:

$$\mu = \mu' \otimes \mu''$$

და აღვნიშნოთ L_2 სიმბოლოთი მისი შესაბამისი კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე. ამ სივრცის ფუნქციები ჩავწეროთ როგორც ორი ცვლადის ფუნქციები.

თეორემა 1.2 (იხ. Колмогоров, Фомин 1989, თეორემა VII.3.1). თუ $\{\varphi_m\}$ და $\{\psi_n\}$ სრული ორთონორმირებული სისტემებია შესაბამისად L_2'-სა და L_2'' სივრცეებში, მაშინ ყველა ნამრავლთა სისტემა

$$f_{mn}(x, y) = \varphi_m(x) \psi_n(y)$$

არის სრული ორთონორმირებული სისტემა L_2-ში. □

§ 2
ერთი ცვლადის პუასონის პოლინომიალური ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

ვთქვათ, $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{0\le t\le\infty}, \mathrm{P})$ სტანდარტული ალბათური სივრცეა, ხოლო N_t - მასზე განსაზღვრული სტანდარტული პუასონის პროცესია: $\mathrm{P}(N_t = n) = \frac{t^n}{n!}e^{-t}$, $n = 0,1,\dots$. როგორც ცნობილია, კომპენსირებული პუასონის პროცესი, $M_t := N_t - t$ წარმოადგენს ნორმალურ მარტინგალს. ჩვენი მიზანია, ვინერის ფუნქციონალებისათვის პირველ თავში დამტკიცებული მარტინგალური წარმოდგენის თეორემების ანალოგიური თეორემები დავამტკიცოთ ამჯერად კომპენსირებული პუასონის ფუნქციონალებისთვის.

სანამ მოვიყვანდეთ წარმოდგენის ზოგად თეორემას, მოვიყვანოთ ორი მაგალითი.

მაგალითი 2.1. სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა:

$$M_T^2 = E(M_T) + \int_{(0,T]} (1 + 2M_{s-})dM_s \; . \qquad (\mathrm{P}\text{- თ.ყ.}).$$

შემოვიღოთ შემთხვევითი პროცესი: $X_t := E[M_T^2 | \Im_t]$. პუასონის პროცესის ნაზრდების წარსულისაგან დამოუკიდებლობის, სტაციონარულობისა და 1.4 ლემის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$X_t = E[(M_T - M_t + M_t)^2 | \Im_t] = E[(M_T - M_t)^2] +$$
$$+ 2M_T E(M_T - M_t) + M_t^2 = T - t + M_t^2 \, .$$

1.6 ლემის საფუძველზე, თუ უკანასკნელ წარმოდგენაში ჩავსვამთ M_t^2-ის ინტეგრალურ წარმოდგენას

$$M_t^2 = \int_{(0,t]} 2M_{s-}dM_s + \int_{(0,t]} dN_s$$

მივიღებთ, რომ:

$$X_t = T - t + \int_{(0,t]} 2M_{s-}dM_s + N_t = T + M_t + \int_{(0,t]} 2M_{s-}dM_s \; .$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $E[M_T^2] = T$ და $X_T = M_T^2$, მაშინ უკანასკნელი თანაფარდობიდან, დავინახავთ, რომ:

$$M_T^2 = E[M_T^2] + \int_{(0,T]} (1 + 2M_{s-})dM_s \; . \quad \square$$

შენიშვნა 2.1. მიღებული წარმოდგენა არის კლარკის ფორმულის ანალოგი კომპენსირებული პუასონის პროცესის კვადრატისთვის (ვინერის პროცესის შემთხვევაში გვქონდა, რომ:

$$w_T^2 = E(w_T) + \int_{(0,T]} 2w_s dw_s \,).$$

მაგალითი 2.2. ანალოგიური მსჯელობით მიიღება წარმოდგენა კომპენსირებული პუასონის პროცესის მესამე ხარისხისთვის:

$$M_T^3 = E(M_T^3) + \int\limits_{(0,T]} [1 + 3(T-s) + 3M_{s-} + 3M_{s-}^2] dM_s .$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $X_t := E[M_T^3 | \Im_t]$. მაშინ პუასონის პროცესის ცნობილი თვისებებისა და 1.4 ლემის საფუძველზე ვწერთ:

$$X_t = E[(M_T - M_t + M_t)^3 | \Im_t] = E[(M_T - M_t)^3] +$$
$$+3M_T{}^2 E(M_T - M_t) + 3M_T E(M_T - M_t)^2 + M_t^3 =$$
$$= T - t + 3M_T(T-t) + M_t^3 .$$

მეორეს მხრივ, 1.6 ლემის თანახმად გვაქვს:

$$M_t^3 = \int\limits_{(0,t]} 3M_{s-}^2 dM_s + \int\limits_{(0,t]} 3M_{s-} dN_s + \int\limits_{(0,t]} dN_s .$$

ამიტომ ცხადია, რომ:

$$X_t = T - t + \int\limits_{(0,t]} 3(T-t) dM_s - \int\limits_{(0,t]} 3M_{s-} ds + \int\limits_{(0,t]} 3M_{s-}^2 dM_s + \int\limits_{(0,t]} 3M_{s-} dN_s + \int\limits_{(0,t]} dN_s .$$

თუ ახლა გავითვალისწინებთ, რომ $E[M_T^3] = T$ და $X_T = M_T^3$ მივიღებთ:

$$M_T^3 = E(M_T^3) + \int\limits_{(0,T]} [1 + 3(T-s) + 3M_{s-} + 3M_{s-}^2] dM_s . \quad \square$$

შენიშვნა 2.2. შედარებისათვის ვინერის პროცესის შემთხვევაში გვაქვს:

$$w_T^3 = E(w_T^3) + \int\limits_{(0,T]} [3(T-s) + 3w_s^2] dw_s .$$

თეორემა 2.1. ყოველი $n \geq 1$ ნატურალური რიცხვისთვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$M_T^n = E(M_T^n) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \sum_{i=1}^{k} C_k^i \int\limits_{(0,T]} M_{s-}^{k-i} \nu_{n-k}(T-s) dM_s \qquad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (2.1)$$

დამტკიცება: სინამდვილეში $n=1$-ის შემთხვევაში (2.1) წარმოდგენა ტრივიალურია, ხოლო $n=2$ და $n=3$ შემთხვევებისთვის გვაქვს 2.1 და 2.2 მაგალითები. ამიტომ განვიხილოთ $n \geq 4$ შემთხვევა. გამოვთვალოთ $X_t := E[M_T^n | \Im_t]$ პირობითი მათემატიკური ლოდინი. ნიუტონის ბინომის ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$X_t := E[M_T^n | \Im_t] = E[(M_T - M_t + M_t)^n | \Im_t] = E[\sum_{k=0}^{n} C_n^i (M_T - M_t)^{n-k} M_t^k | \Im_t].$$

პუასონის პროცესისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის ცნობილი თვისებების საფუძველზე მივიღებთ წარმოდგენას:

$$X_t = \sum_{k=0}^{n} C_n^i \nu_{n-k}(T-t) M_t^k = \nu_n(T-t) + \sum_{k=1}^{n-2} C_n^k M_t^k \nu_{n-k}(T-t) + M_t^n .$$

გამოვთვალოთ X_t პროცესის სტოქასტური დიფერენციალი. დავწეროთ იტოს ფორმულა და ვისარგებლოთ 1.5 ლემისა და 1.6 ლემის მტკიცებულებებით. მივიღებთ, რომ:

$$X_t = X_0 - \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \int\limits_{(0,t]} \nu_k(T-s) ds - \sum_{k=1}^{n-2} C_n^k \sum_{i=0}^{n-k-2} C_{n-k}^i \int\limits_{(0,t]} M_{s-}^k \nu_i(T-s) ds +$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} C_n^k \int\limits_{(0,t]} M_{s-}^{n-k} dN_s + \sum_{k=1}^{n-2} C_n^k \sum_{i=2}^{k} C_k^i \int\limits_{(0,t]} M_{s-}^{k-i} \nu_{n-k}(T-s) dN_s +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2} C_n^k k \int_{(0,t]} M_{s-}^{k-1} \nu_{n-k}(T-s) dM_s + n \int_{(0,t]} M_{s-}^{n-1} dM_s \,.$$

ამ წარმოდგენაში $\nu_1(T)=0$, ტოლობის გათვალისწინებით შესაძლებელია მეორე და მესამე შესაკრებების, აგრეთვე მეოთხე და მეხუთე შესაკრების შეერთება. რის შედეგად მივიღებთ:

$$X_t = X_0 - \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \sum_{i=0}^{n-k-2} C_{n-k}^i \int_{(0,t]} M_{s-}^k \nu_i(T-s) ds +$$

$$+\sum_{p=1}^{n} C_n^p \sum_{j=2}^{p} C_p^j \int_{(0,t]} M_{s-}^{p-j} \nu_{n-p}(T-s) dN_s +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2} C_n^k k \int_{(0,t]} M_{s-}^{k-1} \nu_{n-k}(T-s) dM_s + n \int_{(0,t]} M_{s-}^{n-1} dM_s =$$

$$= \nu_n(T) - I_s + I_{N_S} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k k \int_{(0,t]} M_{s-}^{k-1} \nu_{n-k}(T-s) dM_s \,,$$

სადაც

$$I_s := \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \sum_{i=0}^{n-k-2} C_{n-k}^i \int_{(0,t]} M_{s-}^k \nu_i(T-s) ds$$

და

$$I_{N_S} := \sum_{p=1}^{n} C_n^p \sum_{j=2}^{p} C_p^j \int_{(0,t]} M_{s-}^{p-j} \nu_{n-p}(T-s) dN_s \,.$$

თუ დავაკვირდებით მიღებულ თანაფარდობას ადვილად შევამჩნევთ (ისევე როგორც 2.1-სა და 2.2 მაგალითებში), რომ თითოეულ ინტეგრალს dN_s – ის მიმართ მოეძებნება შესაბამისი ინტეგრალი ds-ის მიმართ, რომელთა ინტეგრა-ნდები მოდულით ტოლი და ნიშნით მოპირდაპირე სიდიდეებია.

მართლაც, შევადაროთ ერთმანეთს M_{s-}-ის ერთი და იგივე ხარისხები. ვთქვათ, $k = p - j := m$. მაშინ I_s-ში თუ M_{s-}-ის ხარისხი ტოლია m-ის, შესაბამი-სი წევრი იქნება:

$$\sum_{i=0}^{n-m-2} C_n^m C_{n-m}^i \int_{(0,t]} M_{s-}^m \nu_i(T-s) ds \,,$$

ხოლო dN_s – ის შესაბამისი წევრი იქნება:

$$\sum_{j=0}^{m+j} C_n^{m+j} C_{m+j}^j \int_{(0,t]} M_{s-}^m \nu_i(T-s) dN_s \,.$$

პირველი ჯამის ბოლო წევრი და მეორე ჯამის პირველი წევრი ერთმანეთს ემთხვევა, პირველი ჯამის ბოლოს წინა წევრი და მეორე ჯამის მეორე წევრი ერთმანეთს ემთხვევა და ა.შ. პირველი ჯამის ბოლოდან j-ური წევრი და მეორე ჯამის j-ური წევრი ერთმანეთს ემთხვევა. მართლაც, პირველი ჯამის ბოლოდან j-ური წევრი იქნება:

$$C_n^m C_{n-m}^{n-m-2-j} \int_{(0,t]} M_{s-}^m \nu_{n-m-2-j}(T-s) ds \,,$$

ხოლო მეორე ჯამის j-ური წევრი იქნება:

$$C_n^{m+2+j} C_{m+2+j}^{2+j} \int_{(0,t]} M_{s-}^m \nu_{n-m-2-j}(T-s) dN_s \,.$$

ამოწერილ წევრებში ინტეგრალების ინტეგრანდები და მათი კოეფიციენტებიც ერთმანეთს ემთხვევა, ვინაიდან:

$$C_n^m C_{n-m}^{n-m-2-j}=\frac{n!}{m!(n-m-2-j)!(2+j)!}$$

და

$$C_n^{m+2+j} C_{m+2+j}^{2+j}=\frac{n!}{m!(n-m-2-j)!(2+j)!}.$$

მაშასადამე, ჩვენ მივიღეთ, რომ თვითოეულ ინტეგრალს dN_s – ის მიმართ მოეძებნება შესაბამისი ინტეგრალი ds-ის მიმართ, რომელთა ინტეგრანდები მოპირდაპირე სიდიდეებია.

ამიტომ მათი შეკრებით მივიღებთ ინტეგრალს dM_s – ის მიმართ, რაც $X_T=M_T^n$ და $X_0=E(M_T^n)$ ტოლობების გათვალისწინებით გვაძლევს შემდეგ წარმოდგენას:

$$M_T^n=E[M_T^n]+\sum_{k=1}^n C_n^k \int_{(0,T]} M_{s-}^{n-k} dM_s+$$

$$+\sum_{k=2}^{n-2} C_n^k \sum_{i=1}^k C_k^i \int_{(0,T]} M_{s-}^{k-i} \nu_{n-k}(T-s) dM_s+n \int_{(0,T]} \nu_{n-1}(T-s) dM_s .$$

უკანასკნელი წარმოდგენა კი შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$M_T^n=E(M_T^n)+\sum_{k=1}^n C_n^k \sum_{i=1}^k C_k^i \int_{(0,T]} M_{s-}^{k-i} \nu_{n-k}(T-s) dM_s . \ \square$$

შედეგი 2.1 ნებისმიერი ნატურალური $n \geq 1$-თვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$M_T^n=E(M_T^n)+\int_{(0,T]} E[(1+M_{s-}+M_{T-s})^n-(M_{s-}+M_{T-s})^n \mid \Im_s] dM_s . \text{ (P-თ.ყ.)} \qquad (2.2)$$

<u>*დამტკიცება:*</u> (1.6) თანაფარდობის ძალით გვაქვს:

$$(M_{s-}+1)^k-M_{s-}^k=\sum_{i=1}^k C_k^i M_{s-}^{k-i} .$$

ამიტომ 2.1 თეორემის თანახმად ვწერთ:

$$M_T^n=E(M_T^n)+\int_{(0,T]} \sum_{k=1}^n C_n^k[(M_{s-}+1)^k-M^k_{s-}] \nu_{n-k}(T-s) dM_s . \qquad \text{(P-თ.ყ.)}$$

მეორეს მხრივ, ნიუტონის ბინომის ფორმულისა და პუასონის კომპენსირებული პროცესის ცნობილი თვისებების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$E\left[(1+M_{s-}+M_{T-s})^n \mid \Im_s\right]=\sum_{k=0}^n C_n^k (1+M_{s-})^k E\left[M_{T-s}^{n-k} \mid \Im_s\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^n C_n^k (1+M_{s-})^k E\left[(M_T-M_s)^{n-k} \mid \Im_s\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^n C_n^k (1+M_{s-})^k E M_{T-s}^{n-k}=\sum_{k=0}^n C_n^k (1+M_{s-})^k \nu_{n-k}(T-s) .$$

ანალოგიურად,

$$E\left[(M_{s-}+M_{T-s})^n \mid \Im_s\right]=\sum_{k=0}^n C_n^k M_{s-}^k \nu_{n-k}(T-s) .$$

ზემოთ მოყვანილი ყველა თანაფარდობის გაერთიანების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თეორემის მტკიცებულება სამართლიანია. □

შედეგი 2.2. $n-$ური რიგის პოლინომიალური $P_n(x)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$P_n(M_T) = E[P_n(M_T)] + \int_{(0,T]} E[P_n(1+M_{s-}+M_{T-s}) - P_n(M_{s-}+M_{T-s}) \big| \Im_s] dM_s . \quad \text{(P-თ.ყ.)}$$

<u>*დამტკიცება:*</u> შედეგის სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით 2.1 შედეგის საფუძველზე, სტოქასტური ინტეგრალისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის წრფივობის გათვალისწინებით. □

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\nabla f(x) := f(x+1) - f(x)$, $(\nabla P_n(M_T) := \nabla P_n(x)\big|_{x=M_T}$).

შედეგი 2.3. ვინაიდან ფიქსირებული T-სთვის $P_n(x-T)$ არის ისევ n-რიგის პოლინომი x-ის მიმართ, ოღონდ სხვა კოეფიციენტებით, ამიტომ ცხადია (2.2) ტიპის წარმოდგენა გვექნება N_T-ს მიმართ პოლინომიალური ფუნქციონალებისთვისაც:

$$P_n(N_T) = E[P_n(N_T)] + \int_{(0,T]} E[P_n(1+N_{s-}+N_{T-s}) - P_n(N_{s-}+N_{T-s}) \big| \Im_s] dM_t \quad \text{(P-თ.ყ.)}$$

თეორემა 2.2. ნებისმიერი ნატურალური $n \geq 1$ რიცხვისთვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$P_n(M_T) = E[P_n(M_T)] + \int_{(0,T]} E[\nabla P_n(M_T) \big| \Im_{t-}] dM_t . \qquad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (2.3)$$

<u>*დამტკიცება:*</u> ჯერ განვიხილოთ ხარისხოვანი ფუნქციონალების შემთხვევა. გვაქვს:

$$E[\nabla (M_T)^n \big| \Im_{s-}] = E[(M_T+1)^n - M_T^n \big| \Im_{s-}] =$$
$$= E\left[\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k M_T^k \big| \Im_{s-}\right] = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \left(M_T - M_{s-} + M_{s-}\right)^k \big| \Im_{s-}\right] =$$
$$= E\left[\sum_{k-0}^{n-1} C_n^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i (M_T - M_{s-})^i M_{s-}^{k-i} \big| \Im_{s-}\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i E\left(M_T - M_{s-}\right)^i M_{s-}^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i \nu_i (T-t) M_{t-}^{k-i} . \qquad (2.4)$$

თუ შევხედავთ უკანასკნელ თანაფარდობას და (2.1) თანაფარდობის მეორე შესაკრების ინტეგრანდებს, როგორც $n-1$ რიგის პოლინომს M_{s-} -ის მიმართ და გავითვალისწინებთ ნიუტონის ბინომის კოეფიციენტების თვისებებს, ადვილი დასანახია, რომ ეს პოლინომები ერთი და იგივეა. ამიტომ ვღებულობთ, რომ:

$$M_T^n = E(M_T^n) + \int_{(0,T]} E[\nabla M_T^n \big| \Im_{t-}] dM_t . \qquad \text{(P-თ.ყ.)}$$

სტოქასტური ინტეგრალის, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და ∇ ოპერატორის წრფივობის გათვალისწინებით აქედან ადვილად მივიღებთ სასურველ ტოლობას პოლინომიალური ფუნციონალებისთვის. □

შედეგი 2.4. $P_n(N_T)=E[P_n(N_T)]+\int\limits_{(0,T]} E[\nabla P_n(N_T)|\Im_{t-}]dM_t$. (P-თ.ყ.)

თეორემა 2.4. ნებისმიერი პოლინომიალური $P_n(x)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია თანაფარდობა:

$$^{p}\left[D_t^M P_n(M_T)\right]=E\left[\nabla P_n(M_T)|\Im_{t-}\right] , \qquad (dP\otimes dt\text{-თ.ყ.}) \qquad (2.5)$$

სადაც $^{p}\left[D_t^M P_n(M_T)\right]$ სიმბოლოთი აღნიშნულია კომპენსირებული პუასონის პროცესის სტოქასტური წარმოებულის ჭვრეტადი პროექცია.

დამტკიცება: Ma-ს, Protter-ისა და Martin-ის 1998 წლის ცნობილი შედეგის თანახმად ადგილი აქვს ოკონე-ჰაუსმან-კლარკის წარმოდგენას

$$P_n(M_T)=E[P_n(M_T)]+\int\limits_{(0,T]}\left\{^{p}\left[D_t^M P_n(M_T)\right]\right\}dM_t. \quad \text{(P-თ.ყ.)}$$

განვიხილოთ სხვაობა:

$$y_T:=\int\limits_{(0,T]}\left\{E\left[\Delta P_n(M_T)|\Im_{t-}\right]-{}^{p}\left[D_t^M P_n(M_T)\right]\right\}dM_t:=\int\limits_{(0,T]}\eta_t dM_t .$$

ერთის მხრივ, ცხადია, რომ 2.1 თეორემის თანახმად $y_T=0$ (P-თ.ყ.). მეორეს მხრივ, იტოს ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$y_T^2=2\int\limits_{(0,T]} y_{t-}\eta_t dM_t+\int\limits_{(0,T]}\eta_t^2 d[M,M]_t .$$

თუ ავიღებთ უკანასკნელი თანაფარდობის ორივე მხარის მათემატიკურ ლოდინს და გავითვალისწინებთ მარტინგალის კვადრატული და ჭვრეტადი მახასიათებლების ცნობილ თვისებებს, მივიღებთ:

$$0=E\int\limits_{(0,T]}\eta_t^2 d[M,M]_t=E\int\limits_{(0,T]}\eta_t^2 d\left\langle M,M\right\rangle_t=E\int\limits_{(0,T]}\eta_t^2 dt ,$$

საიდანაც ვასკვნით (2.5) თანაფარდობის სამართლიანობას. □

მიღებული შედეგი სამართლიანია პოლინომიალურ ფუნქციებზე უფრო ფართო კლასისთვის. შემდეგი ნაბიჯი იქნება ანალოგიური წარმოდგენის მიღება კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა გარკვეული კლასისათვის.

§ 3
ერთი ცვლადის კვადრატით ინტეგრებადი პუასონის ფუნქციონალების სტოქასტური იტეგრალური წარმოდგენა

ვთქვათ, $Z^+ = \{0, 1, 2, \}$ და $P = \{P_1, P_2, P_3, ...\}$ პუასონის განაწილებაა: $P_x = \frac{e^{-T} T^x}{x!}, x = 0,1,2,....$ შემოვიღოთ აღნიშვნა $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$ ($f(x) = 0, x < 0$) და განვმარტოთ პუასონ-შარლეს პოლინომები:

$$\Pi_n(x) = \frac{(-1)^n \Delta^n P_x}{P_x}, \ (n \geq 1, \Pi_0 = 1).$$

ფუნქციონალური ანალიზის კურსიდან კარგადაა ცნობილი, რომ $\{\pi_n(x)\}_{n\geq 0}$ ($\pi_n(x) = \frac{\Pi_n(x)}{c_n}$) წარმოადგენს ბაზისს $L_2(Z^+)$ სივრცეში:

$$L_2(Z^+) = \{f : \sum_{x=0}^{\infty} f^2(x) < \infty\}.$$

შემოვიღოთ წონის ფუნქცია: $\rho(x,T) := \frac{T^x}{x!} e^{-T}$ და $L_2^T := L_2(Z^+; \rho(x,T))$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ფუნქციონალური სივრცე Z^+-ზე, $\|g\|_{2,T} := \|g\rho(T)\|_{L_2}$ სასრული ნორმით.

თეორემა 3.1. L_2^T სივრცე არის ბანახის სივრცე $\{x^n \rho(x,T)\}_{n\geq 0}$ ბაზისით.

__დამტკიცება:__ 1.2 თეორემის თანახმად, საკმარისია შევამოწმოთ, რომ რაიმე c მუდმივისთვის ადგილი აქვს შეფასებას: $\rho(x,T) \cdot e^{c|x|} < \infty$. მართლაც, გვაქვს:

$$\rho(x,T) \cdot e^{c|x|} = e^{c|x|} \frac{T^x}{x!} e^{-T} = e^{-T} \frac{(e^c T)^x}{x!} < \infty \quad .$$

თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 3.2. დავუშვათ, რომ $f \in L_2^T$ და ამასთანავე $\nabla f(x-T) \in L_2^T$, მაშინ არსებობს ინტრეგრალი:

$$\int_{(0,T]} E[\nabla f(M_T) \big| \Im_{t-}^M] dM_t .$$

დამტკიცება: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ (იხ. Липцер, Ширияев 1986 §2.2):

$$E \int_{(0,T]} E[\nabla f(M_T) \big| \Im_{t-}^M]^2 d[M,M]_t < \infty .$$

მართლაც, იენსენის უტოლობის თანახმად, პირობითი მათემატიკური ლოდინის, ნორმალური მარტინგალის კვადრატული მახასიათებლისა და სტოქასტური ინტეგრალის ცნობილი თვისებების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E \int_{(0,T]} E[\nabla f(M_T) \big| \Im_{t-}^M]^2 d[M,M]_t \leq \int_{(0,T]} EE[\nabla f(M_T) \big| \Im_{t-}^M]^2 dt \leq$$

$$\leq \int_{(0,T]} E[\nabla f(M_T)]dt = \int_{(0,T]} dt \cdot \|\nabla f\|_{2,T} = T \cdot \|\nabla f\|_{2,T} < \infty . \ \square$$

თეორემა 3.3. დავუშვათ, რომ $f \in L_2^T$ და რაიმე $0 < \alpha < 1$ რიცხვისთვის $\nabla f(x-T) \in L_2^{T/\alpha}$, მაშინ $f(M_T)$ ფუნქციონალისათვის სამართლიანია შემდეგი სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$f(M_T) = E\left[f\left(M_T\right)\right] + \int_{(0,T]} E[\nabla f(M_T) | \Im_{t-}^M] dM_t . \quad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (3.1)$$

<u>*დამტკიცება:*</u> შემოვიღოთ აღნიშვნა $\tilde{f}_T(x) := f(x-T)$. მაშინ 3.1 თეორემის საფუძველზე, მისთვის მოიძებნება პოლინომთა ისეთი მიმდევრობა $Q_n(x)$, რომ სრულდება თანაფარდობა:

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n(x) - \nabla \tilde{f}_t(x)\|_{2,T/\alpha} = 0 .$$

განვმარტოთ პოლინომთა ახალი მიმდევრობა:

$$\tilde{P}_n(x) := \tilde{f}_T(0) + \sum_{i=0}^{x-1} Q_n(i) .$$

ცხადია, რომ

$$\tilde{P}_n(N_T) = \tilde{f}_T(0) + \sum_{i=0}^{N_T-1} Q_n(i) ;$$

$$\tilde{f}_T(N_T) = \tilde{f}_T(0) + \sum_{i=0}^{N_T-1} [\tilde{f}_T(i+1) - \tilde{f}_T(i)] = \tilde{f}_T(0) + \sum_{i=0}^{N_T-1} \Delta \tilde{f}_T(i) ;$$

და

$$\tilde{P}_n(N_T) - \tilde{f}_T(N_T) = \sum_{i=0}^{N_T-1} [Q_n(i) - \Delta \tilde{f}_T(i)] .$$

2.4 შედეგის თანახმად პოლინომთა ახალი $\tilde{P}_n(x)$ მიმდევრობისათვის ადგილი აქვს წარმოდგენებს:

$$\tilde{P}_n(N_T) = E[\tilde{P}_n(N_T)] + \int_{(0,T]} E[\nabla \tilde{P}_n(N_T) | \Im_{t-}^M] dM_t . \quad \text{(P-თ.ყ.).} \qquad (3.2)$$

შევამოწმოთ, რომ (3.2) წარმოდგენის თითოეული წევრი კრებადია $\tilde{f}_T(x)$ ფუნქციისათვის დაწერილი (3.1) წარმოდგენის შესაბამისი წევრისაკენ, ანუ

$$\tilde{f}_T(N_T) = E[\tilde{f}_T(N_T)] + \int_{(0;T]} E[\nabla \tilde{f}_T(N_T) | \Im_{t-}^M] dM_t \qquad \text{(P-თ.ყ.)}$$

წარმოდგენის შესაბამისი წევრისაკენ. პირველ ეტაპზე ვაჩვენოთ მარცხენა მხარეების კრებადობა. თუ გამოვიყენებთ ელემენტალურ უტოლობას:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2} ,$$

ადვილად დავინახავთ, რომ:

$$\|\tilde{P}_n(N_T) - \tilde{f}_T(N_T)\|_{2,T}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{i=0}^{k-1} (Q_n(i) - \nabla \tilde{f}_T(i))^2 \frac{T^k}{k!} e^{-T} .$$

აღვნიშნოთ $i_0 = i_0(T/\alpha)$ სიმბოლოთი ის ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც ერთდროულად სრულდება თანაფარდობები:

$$\frac{i_0!}{(T/\alpha)^{i_o}} \le 1, \text{ ხოლო } \frac{(i_0+1)!}{(T/\alpha)^{i_0+1}} \ge 1.$$

მაშინ ცხადია, რომ ასეთი რიცხვისთვის:

$$\max\left\{\frac{i!}{(T/\alpha)^i}\right\} = \begin{cases} 1, & \text{როცა } k-1 \le i_0(T/\alpha); \\ \dfrac{(k-1)!}{(T/\alpha)^{k-1}}, & \text{როცა } k-1 \ge i_0(T/\alpha). \end{cases}$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$\left\|\widetilde{P}_n(N_T) - \widetilde{f}_T(N_T)\right\|_{2,T}^2 \le T\sum_{k=0}^{i_0+1}\sum_{i=0}^{k-1}(Q_n(i) - \nabla\widetilde{f}_T(i))^2 \frac{(T/\alpha)^i}{i!} e^{-\frac{T}{\alpha}} e^{\frac{T}{\alpha}} \frac{T^{k-1}}{(k-1)!} e^{-T} +$$

$$+T\sum_{k=i_0+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k-1}(Q_n(i) - \nabla\widetilde{f}_T(i))^2 \frac{(T/\alpha)^i}{i!} e^{-\frac{T}{\alpha}} \frac{(k-1)!}{(T/\alpha)^{k-1}} e^{\frac{T}{\alpha}} \frac{T^{k-1}}{(k-1)!} e^{-T}.$$

თუ გავზრდით დადებით შესაკრებთა რაოდენობას ჯამში, შეგვიძლია დავასკვნათ რომ:

$$\left\|\tilde{P}_n(N_T) - \tilde{f}_T(N_T)\right\|_{2,T}^2 \le \left\|Q_n(N_T) - \tilde{f}_T(N_T)\right\|_{2,T/\alpha}^2 \times$$

$$\times\left[T\sum_{k=0}^{i_0+1}\frac{T^{k-1}}{(k-1)!}e^{-T}e^{T/\alpha} + \sum_{k=i_0+1}^{\infty}\alpha^{k-1}e^{T/\alpha}e^{-T}\right] \to 0, \quad \text{როცა } n\to\infty.$$

ამრიგად, $\tilde{P}_n(N_T)$ კრებადია $\tilde{f}_T(N_T)$-საკენ $L_{2,T}$ სივრცეში, როცა $n\to\infty$. აქედან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს (3.2) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მყოფი პირველი შესაკრების კრებადობაც შესაბამისი შესაკრებისაკენ.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ:

$$\int_{(0,T]} E[\nabla\tilde{P}_n(N_T)\,|\,\Im_{t-}^M]dM_t \xrightarrow{L_2} \int_{(0,T]} E[\nabla\tilde{f}_T(N_T)\,|\,\Im_{t-}^M]dM_t, \text{ როცა } n\to\infty.$$

მართლაც, სტოქასტური ინტეგრალისა და ნორმალური მარტინგალის ცნობილი თვისებების საფუძველზე, თუ ვისარგებლებთ იენსენის უტოლობით, ძნელი არ არის დავინახოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი გადასვლები:

$$E\left\{\int_{(0,T]} E[\nabla\tilde{P}_n(N_T)\,|\,\Im_{t-}^M] - E[\nabla\tilde{f}_T(N_T)\,|\,\Im_{t-}^M]dM_t\right\}^2 =$$

$$= \int_{(0,T]} E\{E[\nabla\tilde{P}_n(N_T)\,|\,\Im_{t-}^M] - E[\nabla\tilde{f}_T(N_T)\,|\,\Im_{t-}^M]\}^2 d[M,M]_t =$$

$$= E\int_{(0,T]}\{E[\nabla\tilde{P}_n(N_T) - \nabla\tilde{f}_T(N_T)\big|\Im_{t-}^M]\}^2 d\langle M,M\rangle_t =$$

$$= E\int_{(0,T]}\{E[\nabla\tilde{P}_n(N_T) - \nabla\tilde{f}_T(N_T)\big|\Im_{t-}^M]\}^2 dt \le \int_{(0,T]} E[\nabla\tilde{P}_n(N_T) - \nabla\tilde{f}_T(N_T)]^2 dt =$$

$$= \int_{(0,T]} E[Q_n(N_T) - \nabla\tilde{f}_T(N_T)]^2 dt = \int_{(0,T]}\left\|Q_n(x) - \nabla\tilde{f}_T(x)\right\|_{2,T} dt = .$$

$$= \left\|Q_n(x) - \nabla\tilde{f}_T(x)\right\|_{2,T}\int_{(0,T]} dt \le$$

$$\le T\cdot\exp\{(1-\alpha)T/\alpha\}\cdot\left\|Q_n(x) - \Delta\widetilde{f}(x)\right\|_{2,T/\alpha} \to 0, \text{ როცა } n\to\infty.$$

თუ ახლა გადავალთ ზღვარზე (3.2) ტოლობაში, როცა $n\to\infty$, ყველა ზემოთ მიღებული თანაფარდობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ:

$$\tilde{f}_T(N_T) = E[\tilde{f}_T(N_T)] + \int\limits_{(0;T]} E[\nabla\tilde{f}_T(N_T) \mid \Im_{t-}^M] dM_t, \qquad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (3.3)$$

საიდანაც $\widetilde{f}_T(x) = f(x-T)$ და $\nabla\widetilde{f}_T(x) = \nabla f(x-T)$ ტოლობების გათვალისწინებით ადვილად მივიღებთ დასამტკიცებელ წარმოდგენას. □

თეორემა 3.4. დავუშვათ, რომ $f \in L_2^T$ ფუნქციისათვის არსებობს რაიმე ისეთი $0 < \alpha < 1$ რიცხვი, რომ: $\nabla f(x-T) \in L_2^{T/\alpha}$. მაშინ ნებისმიერი $t \in [0,T]$-თვის სამართლიანია ტოლობა:

$${}^p[D_t^M f(M_T)] = E[\nabla f(M_T) \mid \Im_{t-}^M]. \qquad (dP \otimes dt\text{-თ.ყ.}) \qquad (3.4)$$

<u>დამტკიცება</u>: ცნობილია, რომ (იხ. Ma, Protter, Martin 1998) ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$f(M_T) = E\left[f(M_T)\right] + \int\limits_{(o,T]} \left\{{}^p[D_t^M f(M_T)]\right\} dM_t .$$

განვიხილოთ სხვაობა:

$$y_T = \int\limits_{(0,T]} \left\{E[\nabla f(M_T) \mid \Im_{t-}^M] - {}^p[D_t^M f(M_T)]\right\} dM_t := \int\limits_{(0,T]} \eta_t dM_t .$$

ცხადია, რომ უნდა $y_T = 0$ (P-თ.ყ.). მეორეს მხრივ, იტოს ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$y_T^2 = 2\int\limits_{(0,T]} y_{t-}\eta_t dM_t + \int\limits_{(o,T]} \eta_t^2 d[M,M]_t .$$

შესაბამისად,

$$0 = E\int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 d[M,M]_t = E\int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 d\left\langle M,M\right\rangle_t = E\int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 dt ,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა. □

შემოვიღოთ სივრცე: $W_{2,1,\alpha} := \{f : f \in L_2^T, \nabla\widetilde{f}_T \in L_2^{T/\alpha}\}$. ცხადია, რომ ეს იქნება ჰილბერტის სივრცე, რომლის შესაბამისი სკალარული ნამრავლი მოიცემა შემდეგი ნორმით:

$$\|f\|_{2,1,\alpha} := \|f\|_{L_2^T} + \left\|\nabla\widetilde{f}_T\right\|_{L_2^{T/\alpha}} .$$

დავაფიქსიროთ $1 \le p < 2$ და ავღნიშნოთ:

$$L_p^T := \{f : f\rho^{\frac{1}{p}} \in L_2\}\,; \ \|f\|_{L_p^T} := \left\|f\rho^{\frac{1}{p}}\right\|_{L_2} .$$

შემოვიღოთ აგრეთვე შემდეგი ნორმა:

$$\|f\|_{p,1,\alpha} := \|f\|_{L_p^T} + \left\|\nabla\widetilde{f}_T\right\|_{L_p^{T/\alpha}} .$$

განმარტება 3.1. ავღნიშნოთ $W_{p,1,\alpha}$ სიმბოლოთი ბანახის სივრცე, რომელიც მიიღება $W_{2,1,\alpha}$ სივრცის ჩაკეტვით $\|\cdot\|_{p,1,\alpha}$ ნორმის მიმართ.

თეორემა 3.5. თუ $f \in W_{p,1,\alpha}$ $(1 < p < 2)$, მაშინ არსებობს ინტეგრალი:

$$\int\limits_{(0,T]} E[\nabla f(M_T)\big|\Im_{t-}^M]dM_t \,.$$

<u>*დამტკიცება*</u>: თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ:

$$E\int\limits_{(0,T]} E[\nabla f(M_T)\big|\Im_{t-}^M]^2\, d[M,M]_t < \infty \,.$$

მართლაც, მართლაც, იენსენის უტოლობის გამოყენებით, პირობითი მათემატიკური ლოდინის, ნორმალური მარტინგალის კვადრატული მახასიათებლისა და სტოქასტური ინტეგრალის ცნობილი თვისებების საფუძველზე შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ:

$$E\int\limits_{(0,T]} E[\nabla f(M_T)\big|\Im_{t-}^M]^2\, d[M,M]_t \le \int\limits_{(0,T]} EE[\nabla f(M_T)\big|\Im_{t-}^M]^2\, dt \le$$

$$\le \int\limits_{(0,T]} E[\nabla f(M_T)]^2\, dt = \int\limits_{(0,T]} dt\cdot \left\|\nabla f\right\|_{2,T} < \infty \,.$$

თეორემა 3.6. თუ $f \in W_{p,1,\alpha}$, სადაც $1 < p < 2$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$f(M_T) = E\left[f\left(M_T\right)\right] + \int\limits_{(0,T]} E[\nabla f(M_T)\big|\Im_{t-}^M]dM_t \,. \qquad \text{(P-თ.ყ.).}$$

<u>*დამტკიცება:*</u> 3.1 განმარტების თანახმად მოიძებნება ისეთი მიმდევრობა $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W_{p,1,\alpha}$, რომ ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f_n - f\right\|_{2,1,\alpha} = 0\,. \qquad (3.5)$$

შემოვიღოთ შემდეგი მარტინგალები:

$$m(t) := E\left[f(M_T)\big|\Im_t^M\right] \text{ და } m_n(t) := E\left[f_n(M_T)\big|\Im_t^M\right].$$

მარტინგალურ წარმოდგენაში ცნობილი თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი ჭვრეტადი პროცესი g, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას :

$$m(t) = E\left[f\left(M_T\right)\right] + \int\limits_{(0,T]} g(s)dM_s \,.$$

მეორეს მხრივ, თეორემის პირობებში, ყოველი n-სათვის:

$$f_n(M_T) = E\left[f_n\left(M_T\right)\right] + \int\limits_{(0,T]} E[\nabla f_n(M_T)\big|\Im_{t-}^M]dM_t \,,$$

საიდანაც, თუ ავიღებთ ორივე მხარის პირობით მათემატიკურ ლოდინს $\Im_t^M$ σ-ალგებრის მიმართ, მივიღებთ, რომ:

$$m_n(t) = E\left[f_n\left(M_T\right)\right] + \int\limits_{(0,T]} E[\nabla f_n(M_T)\big|\Im_{t-}^M]dM_t \,. \qquad (3.6)$$

დუბის მაქსიმალური კვადრატული უტოლობისა და იენსენის უტოლობის ძალით, (2.1) თანაფარდობის გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$\left\{E\left[\sup_{0<t\le T}\left|m_n(t) - m(t)\right|\right]^p\right\}^{1/p} \le \frac{p}{1-p}\sup_{0<t\le T}\left[E\left|m_n(t) - m(t)\right|^p\right]^{1/p} =$$

$$= \frac{p}{1-p}\left[E\left|m_n(T) - m(T)\right|^p\right]^{1/p} = \frac{p}{p-1}\left\|f_n(M_T) - f(M_T)\right\|_{L_p} \le$$

$$\leq \frac{p}{p-1}\|f_n - f\|_{p,1,\alpha} \to 0, \text{ როცა } n \to \infty.$$

შემდგომ, თუ ვისარგებლებთ ბურკჰოლდერ-განდი-დევისის უტოლობით, ზემოთ მიღებული შეფასების თანახმად გვექნება:

$$E[m_n - m, m_n - m]_T^{p/2} = E\left\{\int_{(0,T]}\left|E\left[\nabla f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right] - g(t)\right|^2 d[M,M]_t\right\}^{p/2} \leq$$

$$\leq cE\left\{\sup_{0\leq t\leq T}|m_n - m|\right\}^p \to 0, \qquad \text{როცა } n \to \infty.$$

გარდა ამისა, ლიაპუნოვის უტოლობის თანახმად, წინა თანაფარდობის საფუძველზე გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{E\int_{(0,T]}\left|E\left[\Delta f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right] - g(t)\right|^2 d[M,M]_t\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(E\left\{\int_{(0,T]}\left|E\left[\Delta f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right] - g(t)\right|^2 d[M,M]_t\right\}^{p/2}\right)^{1/p} = 0.$$

აქედან, ჩებიშევის უტოლობის საფუძველზე ვხედავთ, რომ:

$$P-\lim_{n\to\infty}\int_{(0,T]}\left|E[\Delta f_n(M_T)\,|\,\Im_{t-}^M] - g(t)\right|^2 d[M,M]_t = 0,$$

სადაც $P-\lim\limits_{n\to\infty}$ აღნიშნავს ალბათობით ზღვარს.

ამიტომ კუნიტა-ვატანაბეს უტოლობის საფუძველზე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$P-\lim_{n\to\infty}\int_{(0,T]}\left|E[\nabla f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}^M] - g(t)\right|d[M,M]_t \leq$$

$$\leq P-\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\int_{(0,T]}\left|E[\nabla f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}^M] - g(t)\right|^2 d[M,M]_t\right)^{1/2}\cdot\left(\left[M,M\right]_T\right)^{1/2}\right\} = 0. \qquad (3.7)$$

მეორეს მხრივ, პირობითი მათემატიკური ლოდინისა და ∇ ოპერატორის წრფივობის გამო, ვწერთ:

$$E\int_{(0,T]}\left|E\left[\nabla f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right] - E\left[\nabla f\left(M_T\right)\middle|\Im_{t-}^M\right]\right|dt =$$

$$= E\int_{(0,T]}\left|E\left\{\nabla\left[f_n(M_T) - f(M_T)\right]\middle|\Im_{t-}^M\right\}\right|dt.$$

ამიტომ იენსენის, კოში-ბუნიაკოვსკის, ლიაპუნოვის უტოლობებისა და ფუბინის თეორემის თანახმად თეორემის პირობებში შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E\int_{(0,T]}\left|E\left[\nabla f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}\right] - E\left[\nabla f\left(M_T\right)\middle|\Im_{t-}^M\right]\right|dt \leq$$

$$\leq E\int_{(0,T]}E\left\{|\nabla\left[f_n(M_T) - f(M_T)\right]|\middle|\Im_{t-}^M\right\}dt = E\int_{(0,T]}\left|\nabla\left[f_n\left(M_T\right) - f\left(M_T\right)\right]\right|dt \leq$$

$$\leq \sqrt{T}E\left\{\int_{(0,T]}\}\nabla\left[f_n\left(M_T\right) - f\left(M_T\right)\right]|^2\,dt\right\}^{1/2} \leq$$

$$\le \sqrt{T}\left\{ \int\limits_{(0,T]} E\left| \nabla\left[f_n(M_T) - f(M_T)\right] \right|^2 dt \right\}^{1/2} \le T\|f_n - f\|_{p,1,\alpha} \to 0 \text{, როცა } n \to \infty \quad (3.8).$$

ვინაიდან $\langle M, M\rangle_t = t$ და ნებისმიერი ჭვრეტადი h პროცესისათვის:

$$E\int\limits_{(0,T]} |h(t)|dt = E\int\limits_{(0,T]} |h(t)|d\langle M, M\rangle_t = E\int\limits_{(0,T]} |h(t)|d[M,M]_t \,,$$

ამიტომ (3.8) თანაფარდობიდან ჩვენ ვასკვნით, რომ:

$$\lim_{n\to\infty} E\int\limits_{(0,T]} \left| E\left[\nabla f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right] - E\left[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right]\right| d[M,M]_t = 0 \qquad (3.9)$$

და გარდა ამისა:

$$E\int\limits_{(,T]} \left| E\left[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right]\right| d[M,M]_t = E\int\limits_{(0,T]} \left|E\left[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right]\right| dt < \infty\,.$$

(3.7) და (3.9) თანაფარდობრბის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია ავარჩიოთ ისეთი ქვემიმდევრობა $\{n_k\}_{k\ge1}$, რომ (P თითქმის ყველგან) შესრულდება თანაფარდობები:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,T]} \left|E[\nabla f_{n_k}(M_T)\middle|\Im_{t-}^M] - g(t)\right| d[M,M]_t = 0$$

და

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{(0,T]} \left|E[\nabla f_{n_k}(M_T)\middle|\Im_{t-}^M] - E[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M]\right| d[M,M]_t = 0\,.$$

აქედან ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თითქმის ყველა ω-ში

$$g(\cdot,\omega) = E[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{\cdot t-}^M](\omega) \quad d[M,M]\text{-თითქმის ყველგან.}$$

მაშასადამე, თითქმის ყველა ω-თვის ჩვენ გვაქვს:

$$\int\limits_{(0,T]} \left|g(t) - E[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M]\right| d[M,M]_t = 0\,.$$

შესაბამისად, ჩვენ ვღებულობთ, რომ:

$$E\int\limits_{(0,T]} \left|g(t) - E[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M]\right| d[M,M]_t = 0\,,$$

საიდანაც ჩვენ ვასკვნით, რომ:

$$g(t,\omega) = E[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M](\omega) \qquad (dp\otimes d[M,M]\text{-თ.ყ.})$$

და, მაშასადამე, dP თითქმის ყველგან:

$$\int\limits_{(0,T]} g(t)dM_t = \int\limits_{(0,T]} E[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M]dM_t\,,$$

რითაც თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია. □

შედეგი 3.1. ყოველი $f \in W_{p,1,\alpha}$ $(1 < p < 2)$:

$$\int\limits_{(0,T]} \left| E[\nabla f_n(M_T)\middle|\Im_{t-}^M]\right|^2 d[M,M]_t < \infty \qquad \text{(P-თ.ყ.).}$$

3.4 თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 3.7. თუ $f \in W_{p,1,\alpha}$, სადაც $1 < p < 2$ მაშინ ნებისმიერი $t \in [0,T]$-თვის სამართლიანია თანაფარდობა:

$${}^p\left[D_t^M f(M_T)\right] = E\left[\nabla f(M_T)\middle|\Im_{t-}^M\right] \,. \qquad (dP\otimes dt\text{-თ.ყ.})$$

§ 4
ორი ცვლადის პუასონის პოლინომიალური ტიპის ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\nabla^2 f(x,y) := f(x+1,y+1) - f(x,y).$$

ცხადია, რომ

$$\nabla^2 f(x,y) := \nabla_x(\nabla_y f(x,y)) + \nabla_x f(x,y) + \nabla_y f(x,y).$$

ფიქსირებული S და T რიცხვებისთვის აღვნიშნოთ:

$$\nabla_t^2 f(x,y) := \nabla_x(\nabla_y f(x,y)) I_{[0,T]}(t) I_{[0,S]}(t) + \nabla_x f(x,y) I_{[0,T]}(t) + \nabla_y f(x,y) I_{[0,S]}(t).$$

დავუშვათ, რომ $P_n(x,y)$- n-ური რიგის პოლინომია x-სა და y-ის მიმართ.

თეორემა 4.1. ნებისმიერი $n \geq 1$ რიცხვისათვის სამართლიანია შემდეგი სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$P_n(M_T, M_S) = E[P_n(M_T, M_S)] + \int\limits_{(0,T\vee S]} E[\nabla_t^2 P_n(M_T, M_S) \big| \Im_{t-}^M] dM_t. \quad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (4.1)$$

<u>*დამტკიცება:*</u> წინასწარ შევამოწმოთ დებულების სამართლიანობა ორი ცვლადის ხარისხოვანი ფუნქციონალებისათვის. განვიხილოთ $M_S^m \cdot M_T^n$ $(T \geq S)$. ფუნქციონალი. აღვნიშნოთ

$$X_t := E\left[M_S^n \cdot M_T^m \big| \Im_t^M \right].$$

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა $S \geq t$. გვაქვს:

$$X_t = E\left[M_S^n \cdot W_T^m \big| \Im_t^M \right] = E\left[E\{W_T^m W_S^n \big| \Im_S^M\} \big| \Im_t^M \right]$$

1.7 ლემის გათვალისწინებით ადვილად მივიღებთ, რომ:

$$X_t = E[M_S^n \sum_{i=0}^m C_m^i \nu_{m-i}(T-S) M_S^i \big| \Im_t^M] = \sum_{i=0}^m C_m^i \nu_{m-i}(T-S) E[M_S^{n+i} \big| \Im_t^M] =$$

$$= \sum_{i=0}^m C_m^i \nu_{m-i}(T-S) \sum_{j=0}^{n+i} C_{n+i}^j \nu_{n+i-j}(S-t) M_t^j =$$

$$= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n+i} C_m^i C_{n+i}^j \nu_{m-i}(T-S) \nu_{n+i-j}(S-t) M_t^j.$$

გამოვიყენოთ იტოს ფორმულა:

$$X_t = X_0 + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n+i} C_m^i C_{n+i}^j \nu_{m-i}(T-S) \left(\int\limits_{(0,t]} j \nu_{n+i-j}(S-s) M_{s-}^{j-1} dM_s + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(0,t]} -M_{s-}^j \sum_{k=0}^{n+i-j-2} C_{n+i-j}^k \nu_k(S-s) ds + \int\limits_{(0,t]} \nu_{n+i-j}(S-s) \sum_{k=2}^j C_j^k M_{s-}^{j-k} dN_s I_{j\geq 2} \right) =$$

$$= X_0 + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n+i} C_m^i C_{n+i}^j \nu_{m-i}(T-S) \int\limits_{(0,t]} j \nu_{n+i-j}(S-s) M_{s-}^{j-1} dM_s +$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+i}C_m^iC_{n+i}^j\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}-M_{s-}^j\sum_{k=0}^{n+i-j-2}C_{n+i-j}^k\nu_k(S-s)ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=2}^{n+i}C_m^iC_{n+i}^j\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}\nu_{n+i-j}(S-s)\sum_{k=2}^{j}C_j^kM_{s-}^{j-k}dN_s\Bigg):=I_1+I_2+I_3,$$

სადაც შესაბამისად

$$I_1:=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+i}C_m^iC_{n+i}^j\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}j\nu_{n+i-j}(S-s)M_{s-}^{j-1}dM_s$$

$$I_2:=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+i}C_m^iC_{n+i}^j\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}-M_{s-}^j\sum_{k=0}^{n+i-j-2}C_{n+i-j}^k\nu_k(S-s)ds$$

$$I_3:=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=2}^{n+i}C_m^iC_{n+i}^j\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}\nu_{n+i-j}(S-s)\sum_{k=2}^{j}C_j^kM_{s-}^{j-k}dN_s\Bigg)$$

თუ მოვახდენთ ორმაგი ჯამის გაშლას I_2-სა და I_3-ში ვნახავთ, რომ თვითოეულ წევრს dN_s-თი შეესაბამება იმავე კოეფიციენტის მქონე წევრი $-ds$-თი. ამ მიზნით შევამოწმოთ M_{s-}-ის ერთი და იგივე ხარისხის მქონე წევრები.

მართლაც, M_{s-}-ის ნული ხარისხისთვის (იგულისხმება I_2-ში $j=0$ და I_3-ში $j=k$) მივიღებთ:

$$I_2(0):=-\sum_{i=0}^{m}C_m^i\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}\sum_{k=0}^{n+i-2}C_{n+i}^k\nu_k(S-s)ds\,,$$

$$I_3(0):=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=2}^{n+i}C_m^iC_{n+i}^j\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}\nu_{n+i-j}(S-s)dN_s\,.$$

ნიუტონის ბინომის კოეფიციენტების თვისებების გამოყენებით ადვილად დავინახავთ, რომ $I_2(0)=-I_3(0)$.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა: შევადაროთ ერთმანეთს M_{s-}-ს p ხარისხის მქონე წევრები, ანუ ავიღოთ I_2-ში $j=p$ და I_3-ში კი $j-k=p$. ეს წევრებია:

$$I_2(p):=-\sum_{i=0}^{m}C_m^iC_{n+i}^p\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}M_{s-}^p\sum_{k=0}^{n+i-p-2}C_{n+i-p}^k\nu_k(S-s)ds\,,$$

$$I_3(p)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=p}^{n+i}C_m^iC_{n+i}^j\nu_{m-i}(T-S)\int_{(0,t]}M_{s-}^pC_j^{j-p}\nu_{n+i-j}(S-s)dN_s\,.$$

ისევ, ნიუტონის ბინომის კოეფიციენტების თვისებების გამოყენებით ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ, რომ $I_2(p)=-I_3(p)$. ვინაიდან, $dN_s-ds=dM_s$, ამიტომ $S\ge t$ შემთხვევისათვის საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ:

$$X_t=X_0+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n+i}C_m^iC_{n+i}^j\nu_{m-i}(T-S)\{\int_{(0,t]}j\nu_{n+i-j}(S-s)M_{s-}^{j-1}dM_s+$$

$$+\int_{(0,t]}\nu_{n+i-j}(S-s)\sum_{k=2}^{j}C_j^kM_{s-}^{j-k}dM_s\}\,.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა: $S<t\le T$. მაშინ 1.7 ლემისა და იტოს ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$X_t := E\left[M_S^n \cdot M_T^m \middle| \mathfrak{I}_t^M\right] = M_S^n E\left[M_T^m \middle| \mathfrak{I}_t^M\right] =$$

$$= M_S^n \sum_{i=0}^n C_n^i \nu_{n-i}(T-t) M_t^i = X_0 + M_S^n \sum_{i=0}^n C_n^i \{ \int_{(0,t]} i\nu_{n-i}(T-s) M_{s-}^{i-1} dM_s +$$

$$+ \int_{(0,t]} \nu_{n-i}(T-s) \sum_{j=2}^i C_i^j M_{s-}^{i-j} dN_s + \int_{(0,t]} -M_{s-}^i \sum_{k=0}^{n-i-2} C_{n-i}^k \nu_k(T-s) ds \} =$$

$$= X_0 + M_S^n \sum_{i=0}^n C_n^i \int_{(0,t]} i\nu_{n-i}(T-s) M_{s-}^{i-1} dM_s +$$

$$+ M_S^n \sum_{i=0}^n C_n^i \int_{(0,t]} \nu_{n-i}(T-s) \sum_{j=2}^i C_i^j M_{s-}^{i-j} dN_s +$$

$$+ M_S^n \sum_{i=0}^n C_n^i \int_{(0,t]} -M_{s-}^i \sum_{k=0}^{n-i-2} C_{n-i}^k \nu_k(T-s) ds := I_1 + I_2 + I_3 ,$$

სადაც შესაბამისად

$$I_1 := M_S^n \sum_{i=0}^n C_n^i \int_{(0,t]} i\nu_{n-i}(T-s) M_{s-}^{i-1} dM_s ,$$

$$I_2 := M_S^n \sum_{i=0}^n C_n^i \int_{(0,t]} \nu_{n-i}(T-s) \sum_{j=2}^i C_i^j M_{s-}^{i-j} dN_s ,$$

$$I_3 := M_S^n \sum_{i=0}^n C_n^i \int_{(0,t]} -M_{s-}^i \sum_{k=0}^{n-i-2} C_{n-i}^k \nu_k(T-s) ds .$$

ისევე როგორც პირველ შემთხვევაში, ადვილი სანახავია, რომ I_2-ის ყოველ წევრს dN_t-თი შეესაბამება I_3-ში იმავე კოეფიციენტის მქონე წევრი $-dt$-თი. მართლაც, შევადაროთ ერთმანეთს M_{s-}-ის ერთი და იგივე p ხარისხის მქონე წევრები. ეს წევრებია:

$$I_2(p) := M_S^n \sum_{i=p+2}^n C_n^i \int_{(0,t]} \nu_{n-i}(T-s) C_i^{i-p} M_{s-}^p dN_s ,$$

$$I_3(p) := -M_S^n C_n^i \int_{(0,t]} -M_{s-}^p \sum_{k=0}^{n-p-2} C_{n-p}^k \nu_k(T-s) ds .$$

ნიუტონის ბინომის კოეფიციენტების თვისებებს გამოყენებით დავინახავთ, რომ $I_2(p) = -I_3(p)$. ამიტომ გვაქვს:

$$X_t = X_0 + \sum_{i=0}^n C_n^i M_S^n \int_{(0,t]} [\nu_{n-i}(T-s) \sum_{j=1}^i C_i^j M_{s-}^{i-j}] dM_s , \quad \text{როცა} \quad S < t \le T .$$

საბოლოოდ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $X_T = M_S^n M_T^m$ და $X_0 = E(M_S^n M_T^m)$, მივიღებთ შემდეგ წარმოდგენას:

$$X_T = M_S^n M_T^m = E[M_S^n M_T^m] + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n+i} C_m^i C_{n+i}^j \nu_{m-i}(T-S) \times$$

$$\times \int_{(0,S]} \nu_{n+i-j}(S-t)(jM_{t-}^{j-1} + \sum_{k=2}^j C_j^k M_{t-}^{j-k}) dM_t +$$

$$+ \sum_{i=0}^n C_n^i M_S^n \int_{(S,T]} \left(\nu_{n-i}(T-t) \sum_{j=1}^i C_i^j M_{t-}^{i-j} \right) dM_t . \qquad \text{(P-თ.ყ.).}$$

ახლა გამოვთვალოთ (4.1) წარმოდგენაში მონაწილე იტერგალქვეშა გამოსახულება $E[\nabla_t^2 P_n(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}]$. ∇_t^2 ოპერატორის განმარტებისა და (1.6) თანაფარდობის საფუძველზე, ადვილი დასანახია, რომ:

$$\nabla_t^2 P_n(M_T,M_S)=\{[(M_S+1)^n(M_T+1)^m-M_S^n(M_T+1)^m]-$$
$$[(M_S+1)^n M_T^m-M_S^n M_T^m]\}I_{(0,S]}(t)+[(M_S+1)^n M_T^m-M_S^n M_T^m]I_{(0,S]}(t)+$$
$$+[M_S^n(M_T+1)^m-M_S^n M_T^m]I_{(0,T]}=[(M_S+1)^n-M_S^n]\times$$
$$\times[(M_T+1)^m-M_T^m]I_{(0,S]}(t)+[(M_S+1)^n-M_S^n]M_T^m I_{(0,S]}(t)+$$
$$+[(M_T+1)^m-M_T^m]M_S^n I_{(0,T]}=\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i M_S^i\sum_{j=0}^{m}C_m^j M_T^j I_{(0,S]}(t)+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-1}C_m^j M_T^j M_S^n I_{(0,T]}(t)=[\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i M_S^i\sum_{j=0}^{m}C_m^j M_T^j+\sum_{j=0}^{m-1}C_m^j M_T^j M_S^n]I_{(0,S]}(t)+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-1}C_m^j M_T^j M_S^n I_{(S,T]}(t)=[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}C_n^i C_m^j M_T^j M_S^i+\sum_{j=0}^{m-1}C_m^j M_T^j M_S^n]I_{(0,S]}(t)+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-1}C_m^j M_T^j M_S^n I_{(S,T]}(t)\,.$$

ახლა გამოვთვალოთ $E[\nabla_t^2 P_n(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]$ პირობითი მათემატიკური ლოდინი. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $S\ge t$. გვაქვს:

$$E[\nabla_t^2 P_n(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]=E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}C_n^i C_m^j M_T^j M_S^i+\sum_{j=0}^{m-1}C_m^j M_T^j M_S^n\right)\Big|\Im_{t-}^M\right].$$

1.7 ლემის გამოყენებით, ზემოთ ჩატარებული პროცედურების ანალოგიურად გამოთვლილი პირობითი მათემატიკური ლოდინი დაემთხვევა $S\ge t$ შემთხვევისათვის ზემოთ გამოთვლილ X_T შემთხვევით სიდიდეს. ანალოგიურად, თუ $S<l\le T$, მაშინ $E[\nabla_t^2 P_n(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]$ -ს მნიშვნელობა დაემთხვევა შესაბამის წარმოდგენას X_T-თვის. რითაც თეორემის დამტკიცება დასრულებულია ხარისხოვანი ფუნქციონალებისთვის.

აქედან გამომდინარე, მათემატიკური ლოდინის, პირობითი მათემატიკური ლოდინის, ∇_t^2 ოპერატორისა და სტოქასტური ინტეგრალის წრფივობის გათვალისწინებით, თეორემა სამართლიანი იქნება პოლინომიალური ფუნქციონალებისთვისაც. □

თეორემა 4.1. ნებისმიერი ნატურალური $n\ge 1$ რიცხვისათვის სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა:

$$^p\left[D_t^M P_n(M_T,M_S)\right]=E[\nabla_t^2 P_n(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M],\qquad (dP\otimes dt\text{-თ.ყ.})$$

სადაც $^p\left[D_t^M P_n(M_T,M_S)\right]$ აღნიშნავს $P_n(M_T,M_S)$ ფუნქციონალის სტოქასტური წარმოებულის ჭვრეტად პროექციას.

დამტკიცება: როგორც ცნობილია (იხ. Ma, Protter, Martin 1998) (P-თ.ყ.) ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$P_n(M_T,M_S)=E[P_n(M_T,M_S)]+\int_{(0,T\vee S]}{}^p\left[D_t^M P_n(M_T,M_S)\right]dM_t\,.$$

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე

$$y_T = \int\limits_{(0,T]} \left\{ {}^p\left[D_t^M P_n(M_T, M_S) \right] - E[\nabla_t^2 P_n(M_T, M_S) \middle| \Im_{t-}^M] \right\} dM_t := \int\limits_{(0,T]} \eta_t dM_t \ .$$

ერთის მხრივ, 4.1 თეორემის თანახმად, ცხადია, რომ $y_T = 0$ (P-თ.ყ.). მეორეს მხრივ, კი იტოს ფორმულის გამოყენებით შეიძლება დავწეროთ, რომ:

$$y_T^2 = 2 \int\limits_{(0,T]} y_{t-} \eta_t dM_t + \int\limits_{(o,T]} \eta_t^2 d[M,M]_t \ .$$

თუ ახლა ავიღებთ ამ ტოლობის ორივე მხარის მათემატიკურ ლოდინს, და გავითვალისწინებთ $y_T = 0$ (P-თ.ყ.) თანაფარდობას, და სტოქასტური ინტეგრალისა და ნორმალური მარტინგალის ცნობილ თვისებებს, მივიღებთ, რომ:

$$0 = E \int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 d[M,M]_t = E \int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 d\langle M,M \rangle_t = E \int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 dt \ ,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა. □

§ 5
ორი ცვლადის კვადრატით ინტეგრებადი პუასონის ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\rho(x,y,T,S) := \frac{S^x}{x!}e^{-T}\,\frac{(T-S)^{y-x}}{(y-x)!}e^{-(T-S)},$$

ხოლო $L_2^{T,S} := L_2(Z^+ \times Z^+; \rho(x,y,T,S))$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ ფუნქციონალური სივრცე $Z^+ \times Z^+$-ზე, $\|g\|_{2,T,S} := \|g\rho(T,S)\|_{L_2}$ სასრული ნორმით.

ლემა 5.1. $L_2^{T,S}$ სივრცე არის ბანახის სივრცე $\{x^n y^m \rho(x,y,T,S)\}_{n,m\geq 1}$ ბაზისით.

დამტკიცება: 1.1 თეორემის თანახმად, ლემის სამართლიანობისათვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი x და y დადებითი რიცხვებისათვის: $\rho(x,y,T,S)\cdot e^{\delta\cdot(x+y)} < \infty$. გვაქვს:

$$\rho(x,y,T,S)\cdot e^{\delta\cdot(x+y)} =$$

$$= \frac{S^x}{x!}e^{-T}\,\frac{(T-S)^{y-x}}{(y-x)!}e^{-(T-S)}\cdot e^{\delta\cdot 2x}\cdot e^{\delta\cdot(y-x)} =$$

$$= \frac{(S\cdot e^{2\delta})^x}{x!}e^{-T}\,\frac{((T-S)\cdot e^{\delta})^{y-x}}{(y-x)!}e^{-(T-S)}$$

თითოეული თანამანრავლი არის შემოსაზღვრული ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\rho(x,y,T,S)\cdot e^{\delta\cdot(x+y)} < \infty. \ \square$$

ნებისმიერი $f(x,y)$ ფუნქციისთვის მოიძებნება ისეთი $g(x,y)$ ფუნქცია, რომ $f(x,y) = g(x,y-x)$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\widetilde{f}(x,y) := f(x-S, y-(T-S))$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 5.1. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია ისეთია, რომ $f(x,y)\in L_2^{S,T}$ და $\nabla_x\nabla_y\widetilde{f}(x,y-x)\in L_2^{S,T}$, მაშინ (P-თ.ყ.). არსებობს ინტეგრალი:

$$\int_{(0,T\vee S]} E[\nabla_t^2 f(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]dM_t.$$

დამტკიცება: დებულების სისწორეში დასარწმუნებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ:

$$E\int_{(0,T\vee S]} E[\nabla_t^2 f(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]^2\, d[M,M]_t < \infty$$

ერთის მხრივ, ნორმალური მარტინგალისა და სტოქასტური ინტეგრალის ცნობილი თვისებების თანახმად, იენსენის უტოლობის საფუძველზე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E\int_{(0,T\vee S]} E[\nabla_t^2 f(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]^2 d[M,M]_t =$$

$$=\int_{(0,T\vee S]} E[E[\nabla_t^2 f(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]]^2 dt \le$$

$$\le \int_{(0,T\vee S]} E[\nabla_t^2 f(M_T,M_S)]^2 dt = \int_{(0,T\vee S]} E[\nabla_t^2 f(M_T,M_S)]^2 dt =$$

$$=\int_{(0,T\vee S} E[\nabla_x(\nabla_y f(M_T,M_S))I_{[0,T]}(t)I_{[0,S]}(t)+\nabla_x f(M_T,M_S)I_{[0,T]}(t)+$$

$$+\nabla_y f(M_T,M_S)I_{[0,S]}(t)]^2 dt \le$$

მეორეს მხრივ, თუ ახლა ვისარგებლებთ $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \le 2\sum_{i=1}^n a_i^2$ უტოლობით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ:

$$E\int_{(0,T\vee S]} E[\nabla_t^2 f(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]^2 d[M,M]_t \le$$

$$\le 2\int_0^S E[\nabla_x(\nabla_y f(M_T,M_S))]^2 dt + 2\int_0^T E[\nabla_x f(M_T,M_S)]^2 dt +$$

$$+2\int_0^S E[\nabla_y f(M_T,M_S)]^2 dt = 2\int_0^S E[f(M_T+1,M_S+1)-f(M_T+1,M_S)-$$

$$-f(M_T,M_S+1)+f(M_T,M_S)]^2 dt + 2\int_0^T E[f(M_T,M_S+1)-f(M_T,M_S)]^2 dt +$$

$$+2\int_0^S E[f(M_T+1,M_S)-f(M_T,M_S)]^2 dt \le$$

$$\le 4\int_0^S E[f(M_T+1,M_S+1)]^2 dt + 8\int_0^S E[f(M_T+1,M_S)]^2 dt +$$

$$+8\int_0^S E[f(M_T,M_S+1)]^2 dt + 12\int_0^S E[f(M_T,M_S)]^2 dt < \infty . \ \square$$

თეორემა 5.2. თუ $f(x,y)$ ფუნქცია ისეთია, რომ $f(x,y)\in L_2^{S,T}$ და $\nabla_x\nabla_y \widetilde{f}(x,y-x)\in L_2^{S/\alpha,T/\alpha}$, მაშინ $0<\alpha<1$ რიცხვისთვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$f(M_T,M_S)=E[f_n(M_T,M_S)]+\int_{(0,T\vee S]} E[\nabla_t^2 f(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]dM_t . \quad \text{(P-თ.ყ.)} \qquad (5.1)$$

<u>დამტკიცება:</u> რადგანაც $\nabla_x\nabla_y \widetilde{f}(x,y-x)\in L_2^{S/\alpha,T/\alpha}$, ამიტომ განმარტების თანახმად მოიძებნება $\widetilde{R}_n(x,y-x)$ პოლინომთა ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$\tilde{R}_n(x,y-x)\xrightarrow{L_2^{S/\alpha,T/\alpha}}\tilde{f}(x,y-x) .$$

განვიხილოთ პოლინომთა ახალი მიმდევრობები (იგულისხმება $y>x$):

$$\widetilde{Q}_{n,1}(x,y-x):=\nabla_x\widetilde{f}(x,0)+\sum_{j=0}^{y-x-1}\widetilde{R}_n(x,j)\,;$$

$$\widetilde{Q}_{n,2}(x,y-x):=\nabla_y\widetilde{f}(0,y-x)+\sum_{i=0}^{x-1}\widetilde{R}_n(i,y-x)\,;$$

$$\widetilde{P}_n(x,y-x):=-\widetilde{f}(0,0)+\nabla_x\widetilde{f}(x,0)+\nabla_y\widetilde{f}(0,y-x)+\sum_{i=0}^{x-1}\sum_{j=0}^{y-x-1}\widetilde{R}_n(i,j)\,.$$

ცხადია, რომ ადგილი აქვს თანაფარდობებს:

$$\nabla_x\widetilde{f}(x,y-x):=\nabla_x\widetilde{f}(x,0)+\sum_{j=0}^{y-x-1}\nabla_x\nabla_y\widetilde{f}(x,j)\,;$$

$$\nabla_y\widetilde{f}(x,y-x):=\nabla_y\widetilde{f}(0,y-x)+\sum_{i=0}^{x-1}\nabla_x\nabla_y\widetilde{f}(i,y-x)\,;$$

$$\widetilde{f}(x,y-x):=-\widetilde{f}(0,0)+\nabla_x\widetilde{f}(x,0)+\nabla_y\widetilde{f}(0,y-x)+\sum_{i=0}^{x-1}\sum_{j=0}^{y-x-1}\nabla_x\nabla_y\widetilde{f}(i,j)\,.$$

$\widetilde{P}_n(x,y-x)$ ფუნქცია წარმოადგენს ერთი ცვლადის ფუნქციის და პოლინომის ჯამს, რომელთათვისაც ჩვენ უკვე მიღებული გვაქვს მარტინგალური წარმოდგენა, ამიტომ $\widetilde{P}_n(x,y-x)$-თვის სამართლიანი იქნება წარმოდგენა:

$$\widetilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)=E[\widetilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)]+$$
$$+\int_{(0,T\vee S]}E[\nabla_t^2\tilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)\big|\Im_{t-}^M]dM \quad \text{(P-თ.ყ.).} \qquad (5.2)$$

ვაჩვენოთ ამ წარმოდგენის კრებადობა შესაბამისი წარმოდგენისკენ $\widetilde{f}$-თვის. ჯერ განვიხილოთ წარმოდგენის მარჯვენა მხარე.

$$\left\|\tilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)-\tilde{f}(N_S,N_T-N_S)\right\|_{L_2}^2=$$
$$=\left\|\sum_{i=0}^{(N_S-1)}\sum_{j=0}^{(N_T-N_S-1)}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]\right\|_{L_2}^2.$$

თუ გამოვიყენებთ ელემენტალურ უტოლობას $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\le 2\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}$ ადვილად დავინახავთ, რომ:

$$\left\|\tilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)-\tilde{f}(N_S,N_T-N_S)\right\|_{L_2}^2=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{(k-1)}\sum_{j=0}^{(r-k-1)}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]\right]^2\frac{k^S}{k!}e^{-S}\cdot\frac{(T-S)^{r-k}}{(r-k)!}e^{-(T-S)}\le$$
$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}k(r-k)\sum_{i=0}^{(k-1)}\sum_{j=0}^{(r-k-1)}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{k^S}{k!}e^{-S}\frac{(T-S)^{r-k}}{(r-k)!}e^{-(T-S)}\,.$$

შევკვეცოთ $k(r-k)$-ზე და გამოსახულება ჯამის შიგნით გავამრავლოთ და გავყოთ $\dfrac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\dfrac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}$ გამოსახულებაზე, მაშინ მივიღებთ:

$$\left\|\widetilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)-\widetilde{f}(N_S,N_T-N_S)\right\|_{L_2}^2\le$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}\sum_{i=0}^{(k-1)}\sum_{j=0}^{(r-k-1)}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\times$$

$$\times\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\frac{i!}{(s/\alpha)^i}e^{\frac{S}{\alpha}}\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{(j-i)!}{((T-S)/\alpha)^{j-i}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}\frac{S\cdot S^{K-1}}{(k-1)!}e^{-S}\frac{(T-S)(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!}e^{-(T-S)}.$$

აღვნიშნოთ $i_0=i_0(S/\alpha)$ სიმბოლოთი ის ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც ერთდროულად სრულდება უტოლობები:

$$\frac{i_0!}{(T/\alpha)^{i_o}}\leq 1,\ \text{ხოლო}\ \frac{(i_0+1)!}{(T/\alpha)^{i_0+1}}\geq 1.$$

აღვნიშნოთ აგრეთვე $i_0^1=i_0^1((T-S)/\alpha)$ სიმბოლოთი ის ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$\frac{i_0^1!}{((T-S)/\alpha)^{i_0^1}}\leq 1\ \text{და}\ \frac{(i_0^1+1)!}{((T-S)/\alpha)^{i_0^1+1}}\leq 1.$$

მაშინ ასეთი რიცხვებისთვის ცხადია, რომ სამართლიანია:

$$\max\left\{\frac{i!}{(S/\alpha)^i}\right\}=\begin{cases}1, & \text{როცა}\quad k-1\leq i_0(S/\alpha);\\ \dfrac{(k-1)!}{(S/\alpha)^{k-1}}, & \text{როცა}\quad k-1\geq i_0(S/\alpha).\end{cases}$$

$$\max\left\{\frac{(j-i)!}{((T-S)/\alpha)^{J-i}}\right\}=\begin{cases}1, & \text{როცა}\quad r-k-1\leq i_0^1((T-S)/\alpha);\\ \dfrac{(r-k-1)!}{((T-S)/\alpha)^{r-k-1}}, & \text{როცა}\quad r-k-1\geq i_0^1((T-S)/\alpha).\end{cases}$$

ყოველივე ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით უკანასკნელი ჯამისათვის სამართლიანი იქნება შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|\widetilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)-\widetilde{f}(N_S,N_T-N_S)\right\|_{L_2}^2\leq$$

$$\leq S(T-S)\sum_{k=0}^{i_0}\sum_{r-k=0}^{i_0^1}\sum_{i=0}^{(k-1)}\sum_{j=0}^{(r-k-1)}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}\frac{S^{k-1}}{(k-1)!}e^{-S}\frac{(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!}e^{-(T-S)}+$$

$$+S(T-S)\sum_{k=0}^{i_0}\sum_{r-k=i_0^1}^{\infty}\sum_{i=0}^{(k-1)}\sum_{j=0}^{(r-k-1)}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}\alpha^{j-i}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}\frac{S^{k-1}}{(k-1)!}e^{-S}e^{-(T-S)}+$$

$$+S(T-S)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}\sum_{i=0}^{(k-1)}\sum_{j=0}^{(r-k-1)}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}e^{-S}\frac{(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!}e^{-(T-S)}+$$

$$+S(T-S)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}\sum_{i=0}^{(k-1)}\sum_{j=0}^{(r-k-1)}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}e^{-S}e^{-(T-S)}\le$$

(გავზრდოთ შესაკრებთა რაოდენობა)

$$\le S(T-S)\sum_{k=0}^{i_0}\sum_{r-k=0}^{i_0^1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}\frac{S^{k-1}}{(k-1)!}e^{-S}\frac{(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!}e^{-(T-S)}+$$

$$+S(T-S)\sum_{k=0}^{i_0}\sum_{r-k=i_0^1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}\alpha^{j-i}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}\frac{S^{k-1}}{(k-1)!}e^{-S}e^{-(T-S)}+$$

$$+S(T-S)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r-k=0}^{i_0^1}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}e^{-S}\frac{(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!}e^{-(T-S)}+$$

$$+S(T-S)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}[\tilde{R}_n(i,j)-\nabla_x\nabla_y\tilde{f}(i,j)]^2\frac{(s/\alpha)^i}{i!}e^{-\frac{S}{\alpha}}\times$$

$$\times\frac{((T-S)/\alpha)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\frac{T-S}{\alpha}}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}e^{-S}e^{-(T-S)}=$$

$$=S(T-S)\left\|\widetilde{R}_n(,)-\widetilde{f}(,)\right\|_{L_2^{S,T}}\cdot\left(e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}\frac{S^{k-1}}{(k-1)!}e^{-S}\frac{(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!}e^{-(T-S)}+\right.$$

$$+\alpha^{j-i}e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}\frac{S^{k-1}}{(k-1)!}e^{-S}e^{-(T-S)}+e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}e^{-S}\frac{(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!}e^{-(T-S)}+$$

$$\left.+e^{\frac{S}{\alpha}}e^{\frac{T-S}{\alpha}}e^{-S}e^{-(T-S)}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

შესაბამისად, ჩვენ მივიღეთ, რომ:

$$\tilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)\xrightarrow{L_2}\tilde{f}(N_S,N_T-N_S)\ ,\quad \text{როცა } n\to\infty.$$

აქედან მარტივად მიიღება მათემატიკური ლოდინების კრებადობაც, ანუ

$$E[\tilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)]\to E[\tilde{f}(N_S,N_T-N_S)]\ ,\quad \text{როცა } n\to\infty.$$

დაგვრჩა შესამოწმებელი უკანასკნელი შესაკრების კრებადობა. შევამოწმოთ, რომ კრებადობას ადგილი აქვს საშუალო კვადრატული აზრით. (დავუშვათ $T\ge S$) მაშინ სტოქასტური ინტეგრალისა და ნორმალური მარტინგალის თვისებების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E\left(\int_{(0,T]}E[\nabla_t^2\tilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)-[\tilde{f}\nabla_t^2(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]dM_t\right)^2\le$$

$$\le E(\int_{(0,T]}\{E[\nabla_t^2\tilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)-[\nabla_t^2\tilde{f}(M_T,M_S)\big|\Im_{t-}^M]\}^2d[M,M]_t)\le$$

$$\le E(\int_{(0,T]}E[\{\nabla_t^2\tilde{P}_n(N_S,N_T-N_S)-[\nabla_t^2\tilde{f}(M_T,M_S)\}^2\big|\Im_{t-}^M]d\left\langle M,M\right\rangle_t)\le$$

(პირობითი მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით)

$$\leq \int_{(0,T]} E[\{\nabla_t^2 \widetilde{P}_n(N_S, N_T - N_S) - [\nabla_t^2 \widetilde{f}(M_T, M_S)\}^2]dt =$$

$$= \int_{(0,T]} E[\{\nabla_x \nabla_y \widetilde{P}_n(N_S, N_T - N_S) I_{(0.S]} I_{(0,T]} + \nabla_x \widetilde{P}_n(N_S, N_T - N_S) I_{(0.S]} +$$

$$+\nabla_y \tilde{P}_n(N_S, N_T - N_S) I_{(0.T]} - (\nabla_x \nabla_y \tilde{f}(N_S, N_T - N_S) I_{(0.S]} I_{(0,T]} +$$

$$+\nabla_x \tilde{f}(N_S, N_T - N_S) I_{(0.S]} + \nabla_y \tilde{f}(N_S, N_T - N_S) I_{(0.T]})]^2 dt \leq$$

($\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2$ უტოლობის გამოყენებით)

$$\leq \int_{(0,T]} E[\nabla_x \nabla_y \widetilde{P}_n(N_S, N_T - N_S) - \nabla_x \nabla_y \widetilde{f}(N_S, N_T - N_S) I_{(0.S]} I_{(0,T]}]^2 dt +$$

$$+ \int_{(0,T]} E[\nabla_x \widetilde{P}_n(N_S, N_T - N_S) - \nabla_x \widetilde{f}(N_S, N_T - N_S) I_{(0.S]}]^2 dt +$$

$$+ \int_{(0,T]} E[\nabla_y \tilde{P}_n(N_S, N_T - N_S) - \nabla_y \tilde{f}(N_S, N_T - N_S) I_{(0,T]}]^2 dt.$$

აქედან, (5.2) წარმოდგენის მარჯვენა მხარის კრებადობის დამტკიცების გზის ანალოგიურად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$E\left(\int_{(0,T]} E[\nabla_t^2 \tilde{P}_n(N_S, N_T - N_S) - [\tilde{f}\nabla_t^2(M_T, M_S)\Big|\Im_{t-}^M]dM_t\right)^2 \leq$$

$$\leq T\int_{(0,T]} S(T-S)\left\|\widetilde{R}_n(,) - \widetilde{f}(,)\right\|_{L_2^{S,T}} \cdot \left(e^{\frac{S}{\alpha}} e^{\frac{T-S}{\alpha}} \frac{S^{k-1}}{(k-1)!} e^{-S} \frac{(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!} e^{-(T-S)} + \right.$$

$$\left. + \alpha^{j-i} e^{\frac{S}{\alpha}} e^{\frac{T-S}{\alpha}} \frac{S^{k-1}}{(k-1)!} e^{-S} e^{-(T-S)} + e^{\frac{S}{\alpha}} e^{\frac{T-S}{\alpha}} e^{-S} \frac{(T-S)^{r-k-1}}{(r-k-1)!} e^{-(T-S)} + e^{\frac{S}{\alpha}} e^{\frac{T-S}{\alpha}} e^{-S} e^{-(T-S)}\right) dt +$$

$$+ T\int_{(0,S]} \left\|\widetilde{Q}_{n,1}(,) - \nabla_x \widetilde{f}(,)\right\|_{L_2^{S,T}} \cdot c_2 dt + T\int_{(0,T]} \left\|\widetilde{Q}_{n,2}(,) - \nabla_y \widetilde{f}(,)\right\|_{L_2^{S,T}} \cdot c_3 dt =$$

$$= \left\|\widetilde{R}_n(,) - \widetilde{f}(,)\right\|_{L_2^{S,T}} c_1 \int_{(0,T]} dt + \left\|\widetilde{Q}_{n,1}(,) - \nabla_x \widetilde{f}(,)\right\|_{L_2^{S,T}} c_2 \int_{(0,S]} dt + \left\|\widetilde{Q}_{n,2}(,) - \nabla_y \widetilde{f}(,)\right\|_{L_2^{S,T}} c_3 \int_{(0,T]} dt,$$

სადაც c_1, c_2 და c_3 არიან მუდმივები. რა თქმა უნდა უკანასკნელ ტოლობაში თვითოეული შესაკრები მიისწრაფის ნულისკენ, რითაც თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. □

თეორემა 5.3. ვთქვათ $f \in L_2^{T,S}$ და რაიმე $0 < \alpha < 1$ რიცხვისთვის $\nabla f(x-T, y-S) \in L_2^{T/\alpha, S/\alpha}$, მაშინ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$^{p}\left[D_t^M f(M_T, M_S)\right] = E[\nabla_t^2 f(M_T, M_S)\Big|\Im_{t-}^M],$$

სადაც $^{p}\left[D_t^M f(M_T, M_S)\right]$ აღნიშნავს $f(M_T, M_S)$ ფუნქციონალის სტოქასტური წარმოებულის ჭვრეტად პროექციას.

დამტკიცება: დამტკიცება ანალოგიურია 4.2 თეორემის დამტკიცების. დავწეროთ ზოგადი წარმოდგენა:

$$f_n(M_T, M_S) = E[f_n(M_T, M_S)] + \int_{(0,T\vee S]} {}^{p}\left[D_t^M f_n(M_T, M_S)\right] dM_t.$$

განვიხილოთ სხვაობა:

$$y_T = \int\limits_{(0,T]} \left\{ {}^p\left[D_t^M f_n(M_T, M_S) \right] - E[\nabla_t^2 f_n(M_T, M_S) \middle| \mathfrak{I}_{t-}^M] \right\} dM_t := \int\limits_{(0,T]} \eta_t dM_t \,.$$

ცხადია, რომ $y_T = 0$ (P-თ.ყ.). მეორეს მხრივ, იტოს ფორმულის გამიყენებით გვაქვს:

$$y_T^2 = 2\int\limits_{(0,T]} y_{t-}\eta_t dM_t + \int\limits_{(o,T]} \eta_t^2 d[M,M]_t \,.$$

შესაბამისად,

$$0= E\int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 d[M,M]_t = E\int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 d\langle M,M\rangle_t = E\int\limits_{(0,T]} \eta_t^2 dt \,.$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა. □

$L_2^{T,S}$ სივრცის ანალოგიურად შესაძლებელია განიმარტოს $L_2^{T_1,T_2,\dots,T_n}$ სივრცე. ამ მიზნით შემოვიღოთ წონის ფუნქცია:

$$\rho(x_1,x_2,\dots,x_n,T_1,T_2,\dots,T_n) := \frac{T_1^{x_1}}{x_1!}e^{-T_1}\frac{(T_2-T_1)^{x_2-x_1}}{(x_2-x_1)!}e^{-(T_2-T_1)}\dots\frac{(T_n-T_{n-1})^{x_2-x_1}}{(x_n-x_{n-1})!}e^{-(T_n-T_{n-1})}$$

და ნებისმიერი ფიქსირებული $T_1 \le T_2 \le \dots \le T_n$-სათვის განვმარტოთ

$$L_2^{T_1,T_2,\dots,T_n} := L_2(Z^n; \rho(x_1,x_2,\dots,x_n,T_1,T_2,\dots,T_n))$$

სივრცე, როგორც ზომად ფუნქციათა სივრცე სასრული ნორმით:

$$\|g\|_{2,T_1,T_2,\dots,T_n} = \|g\cdot\rho(x_1,x_2,\dots,x_n,T_1,T_2,\dots,T_n)\|_2 \,,$$

ორგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი დებულებები:

თეორემა 5.4. ზემოთ განმარტებული $L_2^{T_1,T_2,\dots,T_n}$ სივრცე არის ბანახის სივრცე $\{x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}\dots x_n^{m_n}\rho(x_1,x_2,\dots,x_n,T_1,T_2,\dots,T_n)\}$ ბაზისით.

შემოვიღოთ განმარტება:

$$\nabla^n f(x_1,x_2,\dots,x_n) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\dots i_k=1}^{n}\nabla_{x_{i_1}}\nabla_{x_{i_2}}\cdots\nabla_{x_{i_k}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$\nabla_t^n f(M_{t_1},M_{t_2},\dots,M_{t_n}) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1,i_2,\dots i_k=1}^{n}\nabla_{x_{i_1}}\nabla_{x_{i_2}}\cdots\nabla_{x_{i_k}} f(M_{t_1},M_{t_2},\dots,M_{t_n})\times$$

$$\times I_{[0,t_{i_1}]}(t)I_{[0,t_{i_2}]}(t)\cdots I_{[0,t_{i_k}]}(t)$$

თეორემა 5.5. თუ f ფუნქცია არის $L_2^{T_1,T_2,\dots,T_n}$ სივრციდან და $\nabla_t^n f$ არის იგივე სივრციდან, მაშინ (P-თ.ყ.)

$$\int\limits_{(0,T_1\vee T_2\vee T_n]} E[\nabla_t^n f(M_{t_1},M_{T_2},\dots,M_{T_n}) \middle| \mathfrak{I}_{t-}^M] dM_t$$

ინტეგრალი არსებობს.

თეორემა 5.6. თუ f ფუნქცია არის $L_2^{T_1,T_2,\dots,T_n}$ სივრციდან, ხოლო $\nabla_t^n f$ კი $L_2^{T_1/\alpha,T_2/\alpha,\dots,T_n/\alpha}$ სივრციდან , $0<\alpha<1$, მაშინ $f(M_{T_1},M_{T_2},\dots,M_{T_n})$ ტიპის ფუნქციონალებისთვის (P-თ.ყ.) სამართლიანია წარმოდგენა:

$$f(M_{t_1}, M_{T_2}, ..., M_{T_n}) = E[f(M_{t_1}, M_{T_2}, ..., M_{T_n})] + \int_{(0, T_1 \vee T_2 \vee T_n]} E[\nabla_t^n f(M_{t_1}, M_{T_2}, ..., M_{T_n}) \big| \Im_{t-}^M] dM_t$$

თეორემა 5.7. 5.6 თეორემის პირობებში სამართლიანია თანაფარდობა:

$$^p\left[D_t^M f(M_{T_1}, M_{T_2}, ..., M_{T_n})\right] = E[\nabla_t^n f(M_{T_1}, M_{T_2}, ..., M_{T_n}) \big| \Im_{t-}^M],$$

სადაც $^p\left[D_t^M f(M_{T_1}, M_{T_2}, ..., M_{T_n})\right]$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $f(M_{T_1}, M_{T_2}, ..., M_{T_n})$ ფუნქციონალის სტოქასტური წარმოებულის ჭვრეტადი პროექცია. □

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
2. Ito K. Multiple Wiener intwgral. J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 157-169
3. Дуб Дж. Вероятностные процессы. -- М.: ИЛ, 1956.
3. Ito K. Watanabe S. Transformation of markov processes by multiplicative functionals. Ann. Inst. fourier 15 (1965), 15-30
4. Meyer P.A. Probability and potentials. Blaisdell, Waltham. 1966.
5. Meyer P.A. Integreales stochastiques I. Seminare Proa. I. Lecture Notes in Mathematics, vol.39, pp. 72-94. Springer, berlin Heidelberg New York, 1967
6. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
7. Meyer P.A. Integreales stochastiques II. Seminare Proa. I. Lecture Notes in Mathematics, vol. 39, pp. 95-117. Springer, berlin Heidelberg New York, 1967
8. Meyer P.A. Integreales stochastiques II. Seminare Proa. I. Lecture Notes in Mathematics, vol. 39, pp. 118-141. Springer, berlin Heidelberg New York, 1967
9. Никольский С. М. Приближение функции многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
10. McKean H. P. Stocastic Integrals. Academic Press, New York, 1969
11. Clark J. M. The representation of functionals of Brownian motion as stochastic integrals, Annals of Mathematical Statistics 41 (1970), 1282-1295.
12. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1-3. -- М.: Наука, 1971, 1973, 1975.
13. Вентцель А. Д. Введение в теорию случайных процессов. -- М.: Наука, 1972.
14. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. -- М.: Наука, 1972.
15. Millar P.W. Stocastic Integrals and processes with ststionary independent increments. Proc. Of the Sixth Berkeiey Symp. On Math. Stat. and Proba. (1972), 307-331
16. Rosenblatt M. Random Processes. – New York: Springer-Verlag, 1974.
17. Липцер Р. Ш., Ширияев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
18. Ito K. Stochastic differentials. Applied Mathematics and optimization 1 (1974), 374-381
19. Skorohod A. V. On generalization of a stochastic integral. Theor. Prob. Appl. 20, 219-233 (1975).
20. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. -- М.: Наука, 1977.
21. Malliavin P. Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. Proceeding of the International Sympozium on Stochastic Differential Equations. Kyoto 1976, pp. 195-263. Tokyo: Kinokuniya-Wiley 1978.
22. Haussmann U. G. On the integral representation of functionals of Ito processes, Stochastics 3 (1979), 17-28.
23. Stroock D. W. and Varadhan S.R.S Multidimensional diffusion processes. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979
24. Harrison J. M., Pliska S. R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stochastic Processes and Applications 11 (1981), 215-260.
25. Bichteler K. Stochastic integration and L^p -theory of semimartingales. Annals of probability 9 (1981), 49-89
26. Gaveau B., Trauber P. L'integrale stoqastique comme operateur de divergence dans l'espace functionnel. J. Funct. Anal. 46, 230-238 (1982).
27. Metivier M. Semimartingales: a course on stochastic processes. De Gruyter, berlin New York, 1982.

28. Elliot R. J. Stochastic calculus and applications. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1982
29. Dellacherie C., mayer P.A. probabilities and potential B. nortF Holland, Amsterdam New York, 1982
30. Bessoussan A. On the theory of option pricing. Acta Applicandae Mathematicae 2 (1984), 139-158.
31. Ocone D. Malliavin’s calculus and stochastic integral representation of functionals of diffusion processes, Stochastics 12 (1984), 161-185.
32. Pollard D. Convergence of Stochastic Processes. – New York: Springer-Bverlag, 1984.
33. Пуртухия О.Г. Об уравнениях фильтрации многомерного диффузионного процесса (растущие коэффициенты). Кандидатская диссертация, Москва, МГУ, 1984.
34. Nualart D., Zakai M. Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus. Probab. Theor. Rel. Fields 73, 225-280 (1986).
35. Липцер Р. Ш., Ширияев А. Н. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.
37. Ustunel A. S. La formule de changement de variable pour l’integrale anticipante de Skorohod. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I,303, 329-331 (1986).
38. Крылов Н. В. Введение в теорию случайных процессов. Части 1 и 2. -- М.: Изд-во МГУ, 1986, 1987.
39. Rogers L. C. G., Williams D. Diffusions. Markov Processes and Martingales (1979-94, 1987). -- V. 1,2-nd ed. and V. 2. -- Chichester, J. Wiley & Sons, New York, 1987.
40. Karatzas I., Lehoczky J.P., Shreve S. E. Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon. SIAM Journal on Control and Optimization 25 (1987), 1557-1586.
41. Nualart D., Pardoux E. Stochastic calculus with Anticipating Integrands. Probab. Theor. Rel. Fields 78, 535-581 (1988).
42. Karatzas I. On the pricing of American options. Applied Mathematics and Optimization 17 (1988), 37-60.
41. Martias C. Une formulad’Ito-Ventsel’ pour les processus anticipaties. C. R. Acad. Sci., Ser. I, 307, 675-678 (1988).
43. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.
44. Cox J. C., Huang C. F. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. J. Econ. Theory 49 (1989), 33-83.
45. Karatzas I. Optimization problems in the theory of continuous trading. SIAM Journal on Control and Optimization 27 (1989), 1221-1259.
46. Karatzas I., Lehoczky J.P., Shreve S. E. Existence and uniqueness of multi-agent equilibrium in a stochastic, dynamic, consumption/investmens model. Mathematics of Operations Research 15 (1990), 80-128.
47. Protter P. Stochastic Integrations and Differential Equations. New Approach. –Berlin: Springer-Verlag, 1990.
48. Ocone D., Karatzas I. A Generalized Clark Representation formula, with Application to Optimal Portfilios. Stochastics and Stochastics Reports, v. 34, N 3+4, 187-220 (1991).
49. Williams D. Probability and Martingales. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
50. Purtukhia O. Ito-Ventsel’ Formula for Antisipative Processes. New Trends in Probab. And Statist., VSP/Mokslas, (1991), pp. 503-527.
51. Karatzas I., Shreeve S. Methods of Mathematical Finance. – New York: Columbia Univ. Press, 1995.
52. Karatzas I., Shreeve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. – 2-nd ed.—New York: Springer-Verlag, 1997.
53. Ma J., Protter P., Martin J.S. Anticipating integrals for a class of martingales. Bernoulli 4 (1998), 81-114.

54. Purtukhia O. On the Representation of Measure-Valued Solutions of Second Order Stochas-ic arabolic Equations. Proceedings of A. Rzmadze Mathematical Institute, vol. 116, 133-158 (1998).
55. Liptser R. S., Shiryaev A. N. Statistics of Random Processes. V. 1 General Theory. V. 2 Applications. – Springer, 2000.
56. Purtukhia O. Fubini Type theorems for Ordinary and Stochastic Integrals. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, vol. 130, 101-114 (2002).
57. Ширяев А.Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от Броуновского движения I. Теория Вероятностей и ее Применения. Том 48 (2003), выпуск 2, 375-385.
58. Purtukhia O. An Extension of the Ocone-Haussmann-Clark Formula for a Class of Normal Martingales. Proceedings of A. Rzmadze Mathematical Institute, vol. 132, 127-136 (2003).
59. Jaoshvili V. Stochastic Integral Representation of Functionals of Wiener Processes. Bull. Georg. Acad. Sci. Vol. 171, No 1 (2005a), 17-20. (With O. Purtukhia)
60. Jaoshvili V. Stochastic Integral Representation of Functionals of Poisson Pro-cesses I. Bull. Georg. Acad. Sci. Vol. 172, No, 2 (2005b), 189-192. (With O. Purtukhia)
61. Jaoshvili V. Stochastic Integral Representation of Functionals of Poisson Processes II. Bulletin Georgian Acad. Sci. Vol. 174, No, 2 (2006), 29- (With O. Purtukhia)
62. Граверсен С. Э., Ширяев А.Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от Броуновского движения II. Теория Вероятностей и ее Применения. Том 51 (2006), выпуск 1, 64-77.
63. Jaoshvili V. Stochastic integral representation of functionals of Poisson processes. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 143 (2007), 37-60 (with O. Purtukhia).
64. Jaoshvili V. Stochastic integral representation of two-dimensional Poisson functionals. *Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.* Vol.23 (2008) pp. 116-120 (with O. Purtukhia).
65. Jaoshvili V. An extension of the Ocone-Haussmann-Clark formula for the compansated Poisson process. *Теория вероятностей и ее применения,* том 53, выпуск 2, стр. 349-354 (2008) (with O. Purtukhia).
66. Jaoshvili V. Stochastic integral representation of Poisson functionals. *The Second International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics", Baku, September* 10-12, 2008, v. II, pp. 242-245 (with O. Purtukhia).
67. Jaoshvili V. Stochastic derivative of Poisson functionals. Proceedings of I. Vekua institute Applied Mathematics. Vol.58 (2008) pp. 93-101 (with O. Purtukhia).
68. Jaoshvili V. Martingale Representation Theorems for Multidimensional Wiener Functionals. Bull. Georg. Acad. Sci. Vol. II, No.1 (2008), 41-46. (With O. Purtukhia)
69. Jaoshvili V. Stochastic Integral Representation of Multidimensional Polinolial Poisson Functionals. Bull. Georg. Acad. Sci. Vol. II, No.4 (2008), 19-22. (With O. Purtukhia)